~~Math. P. 372~~
4° Math. P. 372

Uhlhorn

Matheseos Geometria specialis. 296.

R

Entdeckungen

in der

höhern Geometrie,

theoretisch und practisch abgehandelt,

nebst

Prüfung

der von A. W. Wlochatius aufgestellten elementar-geometrischen Auflösung des Delischen Problems u. s. w.

von

Diederich Uhlhorn,

Herzoglich Holstein-Oldenburgischem Mechanicus.

Mit 4 Kupfertafeln.

Oldenburg 1809.

In Commission in der Schulze'schen Buchhandlung.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Dem

Durchlauchtigsten Fürsten zu Lübeck

und

Herzog von Holstein-Oldenburg

Peter Friedrich Ludwig.

Ew. Herzogliche Durchlaucht haben meine bisherigen geringen practisch-mechanischen Arbeiten mit ermunterndem Beyfall aufgenommen, und mich bey deren Fortsetzung gnädigst unterstützt. Aus dieser Rücksicht, vorzüglich aber, weil Ew. Herzogliche Durchlaucht die Künste und Wissenschaften als Kenner ehren,

und jedes Gute und Nützliche thätig befördern, wage ich es, Höchstdenenselben dieses Werk, welches die Erweiterung einer der nützlichsten Wissenschaften zum Gegenstande hat, als einen Beweis meiner lebhaftesten Dankbarkeit unterthänigst zu widmen. Und sollten Ew. Herzogliche Durchlaucht dieser meiner ersten schriftstellerischen Arbeit Höchstdero Beyfall nicht ganz versagen, so würde ich mich für diesen mühevollen Versuch unendlich belohnt fühlen, der ich mit tiefster Ehrerbietung zeitlebens verharre

Ew. Herzoglichen Durchlaucht

unterthänigster

Diederich Uhlhorn.

Vorrede.

Bekanntlich hat die höhere Geometrie einen allgemeinen Einfluß auf alle tiefsinnige Untersuchungen, die in den übrigen Theilen der Mathematik vorkommen. Besonders ist die Anwendung der verschiedenen krummen Linien in den mechanischen Künsten und in der Baukunst vielfach und nützlich, wie ich solches in der Einleitung zu dieser Schrift umständlich aus einander gesetzt habe.

Durch diese Betrachtungen ward ich veranlaßt, den Versuch zu machen, die höhere Geometrie, wo möglich, mit noch mehrern krummen Linien zu bereichern, und dieselben zur Auflösung verschiedener Aufgaben anzuwenden, welches mir auch nach vieler Mühe gelang.

Da es nach meiner Meinung verdienstlicher ist, eine Wissenschaft mit neuen Wahrheiten zu vermehren, als neue Lehrbücher zu schreiben oder andere nur auszuschreiben, wie dieses in den jetzigen Zeiten so häufig geschieht, und wodurch man die Wissenschaft nicht weiter, als seine Vorgänger bringen kann, ja genau betrachtet, dieselbe dadurch eher verlieren, als gewinnen mag: so glaube ich, durch die Ausarbeitung dieser Schrift, kein ganz unnützes Geschäft unternommen zu haben. Ob meine Versuche glücklich ausgefallen sind, mag der Kenner entscheiden.

Sollte diese Schrift mir einigen Beyfall von sachkundigen Männern erwerben, so soll mir derselbe Aufmunterung seyn, nicht allein diese

Untersuchungen fortzusetzen, sondern auch über andere Gegenstände der Mathematik, Physik, Maschinenlehre rc. ähnliche Untersuchungen anzustellen, und dieselben in kleinen Abhandlungen nach und nach herauszugeben.

Bey Prüfung und Beurtheilung dieser Schrift, besonders in Ansehung des Vortrags, bitte ich darauf Rücksicht zu nehmen, daß ich in früheren Jahren durchaus keinen literarischen Unterricht genossen, und die Mathematik ohne mündliche Anleitung studirt habe, auch auf diese Abhandlung nur die Stunden, welche ich sonst der Erhohlung widmete, habe verwenden können. Die Mängel die hiedurch entstanden seyn mögen, wird mir daher der billige Leser hoffentlich verzeihen.

Um diese Unvollkommenheiten in der Folge, so viel als möglich, zu vermeiden, suche ich noch jetzt meine Muttersprache gründlich zu erlernen, wozu es mir in der Jugend an Gelegenheit fehlte. In dieser Schrift, habe ich mich, was die Rechtschreibung betrift, der Hülfe sachkundiger und verehrter Freunde bedienet, denen ich hier öffentlich meinen verbindlichsten Dank abstatte.

Es wird wohl kaum nöthig seyn zu erinnern, daß ich diese Bruchstücke für kein systematisches Ganze ausgebe, und daß ich nur für solche Leser geschrieben habe, welche die nöthigen Vorkenntnisse besitzen; denn sonst hätte Vieles anders geordnet, vollständiger ausgeführt, und mit den nöthigen Beweisen dargestellt werden müssen.

Den Inhalt dieser Schrift wird man aus dem, dieser Vorrede angehängten Verzeichnisse übersehen; die nähere Anzeige der Absicht und die Veranlassung zu einem jeden Abschnitte sind theils im Anfange desselben, theils in der Einleitung angegeben.

Da es bey mathematischen Werken vorzüglich auf einen correcten Druck und auf gute Kupfertafeln ankommt: so habe ich, um diese Schrift so vollkommen wie möglich zu liefern, die Correctur mit besorgt, die

Kupferplatten selbst gestochen, und sie auch abgedruckt. Sowohl diese Platten zu stechen, als auch selbige abzudrucken, sind meine ersten Versuche hierin gewesen, und es war mir deswegen nicht möglich, alle Mängel zu vermeiden, welche aber nicht von der Art sind, daß die Deutlichkeit darunter leiden wird.

Daß ich diese Schrift den Titel, Entdeckungen in der höhern Geometrie u. s. w. gegeben habe, ist nicht aus Anmaßung geschehen, denn ich hätte gern einen bescheidenern dafür gewählt, z. E. Versuch die höhere Geometrie mit einigen neuen krummen Linien zu bereichern, oder Beyträge zur höhern Geometrie. Allein ich wünschte einen Titel zu haben, wodurch der Kenner mehr aufmerksam auf diese Schrift gemacht würde, hauptsächlich weil der Name des Verfassers bis jetzt nur wenig bekannt ist. Ob diese Absicht hierdurch erreicht, und der Kenner dann diese Schrift nicht ganz unbefriedigt aus den Händen legen wird, wird die Zeit lehren; so wie es auch davon abhängen wird, ob ich diese Untersuchungen, welche ich oben schon angeführt habe, sowohl fortsetzen, als auch von einigen von mir erfundenen und verbesserten Maschinen und Instrumenten Beschreibungen herausgeben werde. Diese sind: eine Pferde-Rammmaschine; eine verbesserte Luftpumpe; einen verbesserten Nonius bey winkelmessenden Werkzeugen; ein künstliches Bein und verschiedene andere Instrumente nnd Maschienen.

Noch habe ich folgende Maschinen erfunden und auch im Großen ausgeführt, wovon ich hier meinen Lesern einige Nachricht geben will.

I. Eine Tuchscherermaschine.

Durch einen einfachen Mechanismus, der an eine gewöhnliche Tuchschere, und an jeden Schertisch sich anbringen läßt, können vermittelst meiner Einrichtung so viele Scheren, als man will, von 1, 20 bis 100 in Gang gebracht und erhalten werden. Diese Maschine kann man durch Menschen, Thiere oder Mühlenräder in Bewegung setzen;

ein Mann kann 6 Scheren durch Umdrehung einer Kurbel leicht bewegen, und wenn Thiere oder Mühlenräder die Maschine treiben, 4 bis 6 Schertische bequem abwarten. Die Bewegung der Scheren ist gleichförmig, und so sicher, daß weder Kerben in das Tuch geschnitten werden, noch ungeschorne Stellen darauf zurückbleiben, welches ungeübten und schwachen Scherern leicht begegnet.

Eine solche Tuchscherermaschine, wo 16 Scheren durch ein Wasserrad getrieben werden, habe ich für Hrn. Christian Moll, Kaufmann und Tuchfabrikant zu Hagen in der Grafschaft Mark, angelegt. Diese Maschine hat Herr Kriegsrath Eversmann in seiner Uebersicht der Eisen- und Stahl-Erzeugung auf Wasserwerken in den Ländern zwischen der Lahn und Lippe u. s. w. in den Beylagen, Seite 54. angeführt.

Zur Erfindung einer Tuchscherermaschine, bin ich vor einigen Jahren durch Hrn. Johann Wilhelm Thomas, damals Kaufmann und Tuchfabrikant zu Hückeswagen im Herzogthum Berg, aufgefordert worden. Für denselben habe ich meine erste Tuchscherermaschine, in Hückeswagen, im Jahre 1800 angelegt; sie wurde mit der Hand durch Umdrehung einer Kurbel getrieben. Diese Maschine, so wie die ein Jahr nachher in Hagen für Hrn. Moll ausgeführt, sind, so viel ich weiß, die ersten Tuchscherermaschinen, welche in Deutschland angelegt worden sind.

II. Eine Rauchtobacks-Schneidemaschine.

Diese Maschine kann durch Pferde, Wasserräder, oder Windflügel getrieben werden, und man kann damit so viele Schneideladen, als man will, von 1, 4 bis 16 u. s. w. in Gang bringen und erhalten. Das Schneiden geschieht ganz gleichförmig und ohne Beyhülfe eines Arbeiters; ist eine Lade ausgeschnitten, so hebt sich das Messer durch eine einfache mechanische Vorrichtung aus und steht still,

wobey die übrigen Messer im Gange bleiben. Auch können während des Ganges der Maschine die Messer wieder eingesetzt und in Gang gebracht werden.

III. Eine Schnupftobacks-Rappirmaschine.

Sie kann durch die nämlichen Kräfte wie die vorhergehende Maschine getrieben, und 3, 5 bis 7 Carotten können auf einmal darauf gerieben werden. Durch ein Haupträderwerk lassen sich mehrere dieser Maschinen in Gang bringen und erhalten. Die Carotten drehen sich während des Reibens durch eine einfache Vorrichtung herum, auch können dieselben, nachdem der Toback fein oder grob seyn soll, gestellt werden. Der Arbeiter hat hierbey weiter nichts zu thun, als nur die Carotten einzusetzen. Bey den gewöhnlichen Handrappen werden bekanntlich aufgehauene eiserne Bleche als Reiben gebraucht; diese haben den Nachtheil, daß die Spitzen bald stumpf werden, und sich auch beym Gebrauch leicht voll Toback setzen. Beyde Unvollkommenheiten sind bey meiner Maschine vermieden; auch können die Spitzen auf eine leichte Art wieder scharf gemacht werden.

Diese drey letzten Erfindungen, welche mir viele Mühe und Kosten gemacht haben, bin ich erbötig gegen eine angemessene Prämie mitzutheilen; auch erbiete ich mich, wenn man sich in postfreyen Briefen an mich wendet, über alles nähere Auskunft zu geben.

Ein Roßwerk, wodurch zwey Schneideladen, eine Rappirmaschine, ein Mahl-, zwey Sieb- und ein Stoß-Werk mit 12 Messern nebst einem Schleifsteine getrieben werden, habe ich für Hrn. Johann Gerhard Schrimper, Kaufmann und Tobacksfabrikant allhier, im Jahre 1805 angelegt. Auch habe ich für denselben eine Vorrichtung gemacht, Carotten zu pressen, so daß, wenn selbige aus der Presse kommen, gleich fisellirt werden und alsdann fertig sind.

Noch habe ich eine Wolle=, Kratz= und Spinnmaschine, eine Feilenhauemaschine, eine Maschine Kratzenhacken zu biegen, und eine solche die Löcher dazu in das Leder zu stechen und noch mehrere andere erfunden. Allein da diese bis jetzt noch nicht im Großen ausgeführt sind, so kann ich deren Wirkung noch nicht angeben, welches aber in der Folge, und bey einer andern Gelegenheit geschehen wird.

Oldenburg im December 1808.

D. Uhlhorn.

Inhalt.

Einleitung . . . . Seite 1.

Erster Abschnitt. Erste krumme Linie. Die Ophiuride (Schlangenschwanzlinie) und deren Anwendung.

1. Die Ophiuride zu zeichnen und durch ein Werkzeug zu beschreiben — 11.

2. Von der Verdoppelung des Würfels durch die Ophiuride (Schlangenschwanzlinie) . . . . — 32.

3. Von einigen mechanischen Constructionen der Alten, den Würfel zu verdoppeln, und von verschiedenen Instrumenten um diese Aufgaben dadurch ohne Versuche aufzulösen . . . . — 35.

4. Von der Construction der cubischen Gleichungen durch die Ophiuride (Schlangenschwanzlinie) . . . . . . — 45.

5. Von der Dreytheilung eines Winkels durch die Ophiuride (Schlangenschwanzlinie) . . . . — 50.

Zweyter Abschnitt. Zweyte krumme Linie. Die Toxoïde (Bogenlinie) und deren Anwendung . . . . . . — 53.

Dritter Abschnitt. Dritte krumme Linie. Die Kukumaïde (Querkolbenlinie) und deren Anwendung . . . . — 56.

Vierter Abschnitt. Vierte krumme Linie. Die Krommyoïde (Zwiebellinie) und deren Anwendung . . . . — 62.

Fünfter Abschnitt. Fünfte krumme Linie. Die Didaktyloïde (Zweyfingerlinie) und deren Anwendung . . . — 67.

Sechster Abschnitt. Sechste krumme Linie. Die Skyphoïde (Becherlinie) und deren Anwendung . . . . . — 73.

Siebenter Abschnitt. Siebente krumme Linie. Die Diloboïde (Zweyschotenlinien) und deren Anwendung . . . — 77.

Achter Abschnitt. Noch einige neue krumme Linien vom dritten, vierten, fünften, sechsten, siebenten und achten Grade . . — 82.

Neunter Abschnitt. Einige krumme Linien auf neue Art zu zeichnen, und auch durch Werkzeuge zu beschreiben . . . . . — 95.

Zehnter Abschnitt. Noch einige Bemerkungen über krumme Linien überhaupt, und ihre Anwendungen . . . . . . — 103.

Eilfter Abschnitt. Von der Verdoppelung des Würfels durch die Neilische Parabel . . . . — 115.

Zwölfter Abschnitt. Prüfung einer unrichtigen Auflösung des Delischen Problems, die neulich von A. W. Wlochatius angegeben worden ist . . . . — 117.

Dreyzehnter Abschnitt. Prüfung der von A. W. Wlochatius aufgestellten elementar-geometrischen Auflösung der Aufgabe vom Dreyschnitt des Winkels . . . . — 133.

Vierzehnter Abschnitt. Prüfung der von A. W. Wlochatius erfundenen, sogenannten elementar-geometrischen Zeichnungen einiger regulären Vielecke, als ein 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 und 29 Eck — 139.

Einleitung.

Die Geometrie wird bekanntlich in die elementar und höhere eingetheilt. Zu der elementar Geometrie gehören diejenigen Untersuchungen, die sich über gerade Linien und Kreise anstellen lassen. Die höhere aber beschäftiget sich bloß mit solchen krummen Linien, die außer der Kreislinie in unzählbaren Gestalten vorkommen; zugleich stellt sie auch Betrachtungen an über die von ihnen eingeschlossenen Flächenräume, so wie über die von ihnen erzeugten Körper und Oberflächen. Die erste Stufe in derselben giebt die Lehre von den Kegelschnitten, und die Linien, welche dadurch hervorgebracht werden, heißen bekanntlich Parabel, Ellipse und Hyperbel; dann geht sie zu den sogenannten höhern krummen Linien über, als zu der Cissoïde, Conchoïde, Cycloïde, u. s. w.

Die Anwendung dieser krummen Linien ist in den verschiedenen Künsten und Wissenschaften vielfach. Ich will nur einige davon in der Kürze anführen.

Die Bahn, welche ein schief in die Höhe geworfener Körper macht, ist, wenn man den Widerstand der Luft nicht in Betracht zieht, eine Parabel. Sehr wichtig ist deswegen dieselbe in der Kriegskunst geworden bey dem Bombenwerfen u. s. w. Man hat Tafeln berechnet, aus welchen der Gang der Bomben und Kanonenkugeln nach der Verschiedenheit der Winkel, die sie im Herausfahren mit der Horizontallinie machen, bestimmt werden kann. Wasser, welches mit irgend einer Geschwindigkeit auf einer geneigten Ebene fortläuft, am Ende seines Laufs aber herunterstürzt, bildet bekanntlich eine Parabel. Man kann hiervon eine nützliche Anwendung bey den Wasserrädern machen, wenn die Gerinne nach einer Parabel gebildet werden; denn in solchen, wird das Wasser, seinem natürlichen Falle gemäß, viel freyer laufen und dabey beträchtlich an

Kraft gewinnen. Auch zu Brenn- und andern Spiegeln ist die Parabel oft angewandt worden. Ein parabolischer Spiegel hat die Eigenschaft, daß alle Sonnenstrahlen, die parallel auf denselben fallen, in einen einzigen Punct vereinigt werden, und ist solches die Ursache, warum die parabolischen Brennspiegel in ihren Wirkungen alle andere übertreffen. So findet bey Spiegeltelescopen ebenfalls die Parabel eine gleiche Anwendung; indem die vollkommen parabolisch gebildeten Spiegel ohne die sonst nöthige Blendung die Gegenstände hell, rein und sehr deutlich darstellen. Auch in der Astronomie wird zur Erleichterung bey den Berechnungen der Cometenbahnen Gebrauch von der Parabel gemacht, die ohne Anwendung derselben viel schwerer seyn würden, weil sie alsdann nach einer Ellipse geschehen müßten.

Auch die Anwendung der Ellipse ist vielfach. Schon in alten Zeiten kommt der Gebrauch derselben bey Pumpen-Kolben vor. So ward an eine horizontal liegende Welle eine elliptische Scheibe gesteckt, und indem sich dieselbe herum bewegte, ward das eine Ende eines Hebels, an dessen anderem Ende der Kolben befestiget war, bald in die Höhe gezogen bald heruntergelassen, und so die Pumpe in Bewegung gesetzt. In der Baukunst findet die Anwendung der Ellipse bey Brücken und andern Gewölben Statt. Auch die sogenannten Sprachgewölbe wurden nach einer Ellipse aufgeführt. Dieses hat die Eigenschaft, daß man dasjenige, was in dem einen Brennpunct desselben leise gesprochen wird, in dem andern leicht hören kann, obgleich in der Mitte nichts davon vernommen wird. Den Astronomen ist die Ellipse sehr wichtig, weil jeder Planet sich in einer solchen Bahn bewegt. Die alten Sternkundigen ließen die Planeten in excentrischen Kreisen um die Erde oder um die Sonne laufen; allein hieraus sind nicht alle Erscheinungen hinreichend zu erklären. Nimmt man aber ihre Bahnen elliptisch an, so ist alles leicht erklärbar, woraus also folgt, daß diese Annahme richtig ist.

Die Anwendung der Hyperbel ist in den mechanischen Künsten und in der Baukunst unbedeutend; dagegen aber kann dieselbe, eben wie die Parabel und Ellipse, bey den Constructionen der cubischen und biquadratischen Gleichungen, bey der Theilung eines Winkels in drey gleiche Theile, u. s. w. angewandt werden.

Die Cissoïde und Conchoïde hat man vorzüglich zur Verdoppelung des Würfels und zur geometrischen Auflösung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade gebraucht; auch hat man dieselbe zur Verjüngung der Säulenschäfte und zur Messung der Fässer angewandt.

Eine nützliche Anwendung der Cycloïde und Epicycloïde hat man in den neuern Zeiten bey den Kamm- und Stirnrädern gemacht. Man glaubte gefunden zu haben, daß die beste Gestalt der Kämme zu Kammrädern, die Krümmung einer Cycloïde und zu Stirnrädern die einer Epicycloïde sey. Dies ist aber nur unter der Voraussetzung richtig, daß die Triebstöcke keine Dicke haben, und nur als Linien betrachtet werden. Da bey Mühlen und besonders bey großen Kunsträdern die Triebstöcke viele Gewalt auszustehen haben, und daher von beträchtlicher Dicke genommen werden müssen: so ist deswegen die von der Cycloïde und Epicycloïde abweichende Gestalt der Kämme in einigen Fällen beträchtlich. Dieser Abweichung ungeachtet, geht doch ein in einander greifendes Räderwerk, das mit den eben genannten Kämmen versehen ist, ungleich besser, als wenn dieselben nach dem gewöhnlichen, von practischen Schriftstellern angegebenen Verfahren, welches auf keiner Theorie beruhet, abgerundet werden. Eine vollständige Anweisung, wie auf eine mechanische Weise krumme Linien, welche die beste Gestalt für Kämme und Triebstöcke geben, zu zeichnen sind, findet man in meiner Abhandlung „über die Bestimmung der besten Figur der Kämme und Triebstöcke." *)

Die Schraubenlinie haben schon die Alten gekannt, und davon manche nützliche Anwendungen gemacht. Wird z. E. um einen Cylinder, die genannte Linie gezeichnet, und nach derselben eine gleichweite Röhre darum gewunden: so hat man die bekannte archimedische Wasserschnecke. Auch bey der Wasserschraube wird dieselbe Linie angewandt. Beyde Maschinen sind sehr brauchbar, und werden von Menschen, Pferden, Wasserrädern und Windflügeln in Bewegung gesetzt. So findet bey der Wirzischen Spiralpumpe, bey der Schraube ohne Ende, bey Tuch- Papier- und Buchdrucker-Pressen, und bey mehrern andern Fällen, die jeder leicht selbst aufsuchen kann, die Schraubenlinie ihre Anwendung.

Eine bekannte und nützliche Anwendung bey den Taschenuhren ist die Schnecken- und Spirallinie. Erstere dient, um den ungleichen Zug der Feder zu verbessern, und den Uhren einen gleichförmigen Gang zu geben; nach

*) Man sehe Beyträge zur Verbesserung des Mühlenbaues. Zwey von der Hamburgischen Gesellschaft zur Beförderung der Künste und nützlichen Gewerbe gekrönte Preisschriften mit 6 Kupfertafeln. Hamburg bey Friedrich Perthes. 1804.

der letztern, der Spirallinie, werden die sogenannten Spiralfedern gekrümmt, die man gleichfalls bey den Taschenuhren anwendet, weil sie den Gang derselben so schön reguliren. Auch werden diese Linien in der Baukunst bey Wendeltreppen, bey Verzierungen der Säulen, u. s. w. angewandt.

Endlich will ich noch die Kettenlinie anführen. Diese ist von verschiedenen Mathematikern vorgeschlagen worden, um Gewölbebogen darnach aufzuführen, weil sie denselben eine durchaus gleiche Spannung giebt, und in dieser Hinsicht den elliptischen Bogen an Festigkeit vorzuziehen ist. Indessen sind nach der Kettenlinie, so viel ich weiß, nur sehr selten Gewölbe ausgeführt worden; vielleicht weil sie den Baumeistern nicht bekannt genug war, oder weil diese Gewölbe kein so gefälliges Ansehen, wie die elliptischen haben.

Aus diesen angeführten Anwendungen der krummen Linien erhellet schon der große Nutzen, den die höhere Geometrie den Menschen verschafft. Manchen mag es überflüssig scheinen, daß von dem Nutzen derselben hier so umständlich geredet ist, weil sie diesen als allgemein anerkannt annehmen. Indessen ist es eben so gewiß, daß Viele, die sehr gute Kenntnisse von der Elementar-Mathematik haben, glauben, mit derselben im bürgerlichen Leben recht gut auskommen zu können. Daß dieses aber Vorurtheil ist, davon haben mich verschiedene Vorfälle bey dem Maschinenbau, besonders aber bey der Erfindung und Ausführung neuer Maschinen für Fabriken, Manufacturen u. s. w. hinlänglich überzeugt. Auch hat die höhere Geometrie den Vorzug, daß dieselbe besonders den Verstand schärft, und die beste Gelegenheit giebt, sich in der analytischen Rechnungsart zu üben, die selbst in der gemeinen Mathematik unentbehrlich ist. Und gründet sich nicht die jetzige Vollkommenheit der mathematischen und physicalischen Wissenschaften gerade auf den großen Fortgang, welchen die neuern Mathematiker in der höhern Geometrie gemacht haben! —

Wird der bisher angeführte Nutzen, den die höhere Geometrie verschafft, gehörig in Betracht gezogen: so wird man die Bemühungen, dieselbe mit neuen Kenntnissen zu erweitern, gewiß nicht als überflüssig ansehen. Mich reitzten vorzüglich die krummen Linien, und ich suchte von da aus weiter zu gehen, wo Andere, so viel ich weiß, stehen geblieben waren, oder sich von diesem Wege abgewandt hatten. Nach vieler Mühe gelang es mir, eine bedeutende Anzahl algebraischer krummer Linien vom dritten, vierten, fünften, sechsten, siebten, und achten Grade zu erfinden, wovon ich in diese Abhandlung nur diejenigen Linien aufgenommen habe, die sich durch stetige Bewegung eines Stiftes beschreiben lassen, und wodurch Aufgaben aufgelös't werden können, die durch die

gemeine Geometrie nicht aufzulösen sind. Dieses mußte in mehr als einer Hinsicht geschehen, wenn dieselben für die Ausübung von Nutzen seyn sollten, wie ich gleich darthun werde.

Bekanntlich werden die algebraischen krummen Linien durch eine unbestimmte Gleichung mit zwey unbekannten Größen ausgedrückt, wovon die eine die Abscisse und die andere die Ordinate ist. Wäre es möglich, die Gleichungen von allen Graden aufzulösen: so könnte man zu jeder Abscisse die dazu gehörige Ordinate finden, und alsdann alle algebraische krumme Linien construiren. Bey höhern Gleichungen ist dieses sehr beschwerlich. Hiezu kommt noch, daß man auf diese Art alle Puncte einer krummen Linie nie anders, als durch unendliche Bemühungen, das ist niemals, finden kann. Sollen daher die krummen Linien für die Ausübung von Nutzen seyn: so müssen sie sich durch stetige Bewegung eines Stiftes beschreiben lassen, oder es müssen Puncte derselben auf eine leichte und sichere Art geometrisch gefunden werden können, wie dieses bey den Kegelschnitten, bey der Cissoïde, Conchoïde, Cardioïde u. s. w. der Fall ist. Dagegen sind die allgemeinen Untersuchungen über die krummen Linien, in welchen man dieselben in verschiedene Ordnungen und Gattungen oder Familien eintheilt, die Zahl und die Natur der unendlichen Schenkel bestimmt, ihre merkwürdigen Puncte aufsucht u. s. w., als Uebungen in der Theorie allemal nützlich. Indessen darf nach meiner Meinung bey neuen Entdeckungen und Erfindungen nicht sogleich allein auf den practischen Nutzen derselben gesehen werden, denn dieser wird oft erst spät nachher aufgefunden. So haben z. B. schon die alten Geometer die Kegelschnitte gekannt, wovon man in den neuern Zeiten noch, auch viele nützliche Anwendungen gemacht hat. Eben dieses ist auch bey der Cycloïde, Epicycloïde und noch mehrern andern krummen Linien der Fall gewesen. Doch ohne mich jetzt dabey weiter aufzuhalten, will ich nur noch kurz anführen, was für Aufgaben ich mit meinen krummen Linien aufgelöset habe, wie ich nach und nach auf dieselben gekommen bin, und worin die Vorzüge bestehen, die einige von meinen Auflösungen vor andern bekannten Auflösungen haben, u. s. w.

Die nächste Veranlassung dazu gab mir die Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels oder dem Delischen Problem. Sie war bekanntlich eine bey den Alten sehr berühmte Aufgabe, und verlangt die Seite eines Würfels zu finden, welcher doppelt so groß ist, wie ein gegebener. Diese Aufgabe ist schon zur Zeit des Hippokrates von Chio, etwa 450 Jahre vor Christi Geburt, in Anregung gekommen. Hippokrates bemerkte nämlich, daß

es bey der Auflösung dieser Aufgabe darauf ankomme, zwischen zwey gegebenen Linien zwey mittlere Proportionallinien zu finden. Diese können durch die gemeine Geometrie nicht gefunden werden; daher ward diese Aufgabe nicht nur für die Alten, sondern auch überhaupt von Wichtigkeit, indem sie zu Untersuchungen höherer Art führte. Die Veranlassung zu dieser Aufgabe giebt die Sage folgendermaßen an. Zur Zeit des Peloponnesischen Krieges war in Griechenland die Pest ausgebrochen. Man schickte Abgeordnete nach Delos, um das Orakel zu befragen, auf welche Art man die Götter versöhnen könne, worauf man die Antwort erhielt: daß man den Altar des Apollo's, welcher ein Würfel war, verdoppeln oder zweymal so groß machen müsse. Da man aber die Vergrößerung des Altars auf eine unrechte Weise gemacht hatte, und die Pest nicht nachlassen wollte, so wurde man bey wiederholter Anfrage belehrt, daß die Form cubisch bleiben müsse. Als man dieses nicht bewerkstelligen konnte, fragte man Plato um Rath. Plato antwortete den an ihn Abgeordneten: „Dem Gott „liegt eigentlich an der Verdoppelung seines Altars nichts; er verweiset vielmehr „mehr dadurch den Griechen ihre Gleichgültigkeit gegen die Geometrie, befiehlt „ihnen, den Kriegen zu entsagen, und vermahnt sie, sich der Erwerbung von „Kenntnissen mit Ernst zu befleissigen."

Vielleicht hat Plato selbst diesen Ausspruch des Orakels veranlaßt, um dadurch dieser Aufgabe ein größeres Gewicht zu geben, und sie als ein von Apollo selbst herkommendes Problem allen Geometern bekannt zu machen.

Jene Aufgabe hat auch die vornehmsten Geometer unter den Alten beschäftigt: Plato, Apollonius von Pergä, Philo von Byzanz, Sporus und mehrere Andere haben dieselbe mechanisch, d. i. durch Probiren, aufgelöset; Menächmus hat die Parabel und Hyperbel, Nicomedes die Conchoïde, und Diokles die Cissoïde dazu gebraucht. Auch in den neuern Zeiten ist dieselbe oft vorgenommen worden: Orontius Finäus, Professor der Mathematik zu Paris im 16. Jahrhundert, glaubte auf verschiedene neue Arten die Aufgabe auflösen zu können; aber irrig, welches Buteo und Nonius zeigten. Stiefel gab ebenfalls eine unrichtige Construction dieser Aufgabe an, wobey nur Kreise und gerade Linien gebraucht wurden; sie wurde von Buteo widerlegt. Eben so ging es Jos. Scalinger, welcher bloß durch Kreise zwey mittlere Proportionallinien zu finden glaubte; da dieses nicht möglich ist, so kann er die Aufgabe nicht richtig aufgelös't haben. Auch kürzlich hat Wlochatius, Doctor und außerordentlicher Professor der Weltweisheit zu Königsberg, eine elementar-geometrische Auflösung des Delischen Pro-

blems bekannt gemacht, die aber ebenfalls unrichtig ist. Dasselbe ist noch Mehreren begegnet, die ebenfalls nicht hinlängliche Kenntnisse davon besaßen, um ihre vermeinten Auflösungen prüfen zu können.

Die analytische Behandlung der Geometrie, welche Descartes lehrte, gab die völlige Aufklärung über die Beschaffenheit dieser Aufgabe. Man sah, daß sie nur ein sehr besonderer Fall von denjenigen war, jede Gleichung vom dritten oder vierten Grade durch eine geometrische Construction aufzulösen. Descartes brauchte dazu vorzüglich den Kreis und die Parabel; und weil sich der Kreis leichter beschreiben läßt: so zog er denselben den Kegelschnitten vor. So einfach nun auch diese Auflösung war, so mußten doch noch zwey krumme Linien dazu gebraucht werden. Hiezu kommt noch, daß sich die Parabel durch stetige Bewegung eines Stiftes nicht sicher und zuverlässig genug beschreiben läßt; dieselbe aber durch Puncte zu zeichnen, ist viel zu mühsam, und man ist nicht sicher, die Durchschnittspuncte, die man vorzüglich sucht, auf diese Art genau zu bekommen.

Für die höhere Geometrie ist mehrgenannte Aufgabe sehr nützlich gewesen; da sie, wie vorhin gezeigt ist, die Veranlassung zur Erfindung verschiedener krummen Linien gegeben hat, welche vielleicht ohne dieselbe nie erfunden worden wären; und man kann folglich annehmen, daß wir dieser Aufgabe größtentheils das Daseyn der höhern Geometrie zu verdanken haben.

Auch zum practischen Gebrauch ist dieselbe anwendbar; besonders war sie den Alten nützlich bey ihren Kriegsmaschinen, um die Hauptmaßen nach den Wirkungen, die sie thun sollten, zu bestimmen. Ueberhaupt kann diese Aufgabe in der Geometrie da angewandt werden, wo geometrische Körper, mit Beybehaltung der Aehnlichkeit, nach einem bestimmten Verhältniß vergrößert werden sollen. Folglich leistet dieselbe dasjenige geometrisch, was arithmetisch durch Ausziehen der Cubikwurzel u. s. w. gefunden werden kann.

Diese verschiedenen Untersuchungen, Bemühungen und Anwendungen veranlaßten mich über diesen Gegenstand auch nachzudenken, um wo möglich noch mehrere und einfachere Auflösungen dieser Aufgabe, als wir bis jetzt haben, zu erfinden. Das erste worauf ich kam, war Plato's mechanische Auflösung, welche ich nachher in Bürja's Geometrie der krummen Linien fand, wo dieselbe durch zwey Winkelhaken aufgelös't worden ist. Aus dieser mechanischen Auflösung leitete ich die Zeichnung der krummen Linie her, die im Abschn. I. §. 1 u. 2. beschrieben, und Fig. 1 und 2. gezeichnet ist. Sie mag der Aehnlichkeit wegen

Ophiuride (Schlangenschwanzlinie) heißen *). Diese Linie gab mir die Veranlassung zur Erfindung des Instruments, welches §. 13. beschrieben und Fig. 3. abgebildet ist. Dieses Werkzeug setzt uns in den Stand, die genannte krumme Linie durch stetige Bewegung eines Stiftes beschreiben zu können.

Jene krumme Linie ist, so viel ich weiß, neu, und man kann vermittelst derselben und mehrerer geraden Linien nicht allein die Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels auflösen, sondern auch einen Winkel in drey gleiche Theile theilen und alle cubische Gleichungen, deren zweytes Glied fehlet, construiren. In Absicht der Construction ist dieselbe nach dem Kreise eine der einfachsten, und kann der Conchoide an die Seite gesetzt werden; folglich ist sie den Kegelschnitten in mehr als einer Hinsicht vorzuziehen.

Um nun die verschiedenen Auflösungen von der Verdoppelung des Würfels näher kennen zu lernen, als mir dieselbe bisher bekannt waren, schaffte ich mir die in der Anmerkung **) angeführte Schrift an. Sie ist in Lateinischer Sprache abgefaßt, welche ich nicht verstehe; ein sachkundiger Mann hatte indessen die Güte, mir einige Auflösungen, die in dieser Schrift enthalten sind, zu übersetzen.

Auf diesem Wege lernte ich die mechanischen Auflösungen der Alten, den Würfel zu verdoppeln, kennen. Nun machte ich den Versuch, verschiedene von diesen genannten Constructionen durch krumme Linien aufzulösen, welches mir nach einiger Mühe bey den Folgenden gelang. Z. E. die Auflösungen des Apollonius von Pergä, Philo von Byzanz und Sporus. Die beyden ersten führten mich auf meine vorhin angeführte krumme Linie, die Ophiuride; die des letzten auf eine Hyperbel. Meine erste Auflösung ist in Abschn. I. §. 23. beschrieben, die zweyte in Abschn. I. §. 30. Merkwürdig kam es mir vor, daß drey so ganz verschiedene Constructionen auf eine und eben dieselbe krumme Linie führten, und war mir dieses eben so unerwartet, als unangenehm; weil ich gewiß glaubte, auf diesem Wege noch neue krumme Linien zu entdecken. Sporus

---

*) Die nach meinem Bedünken passenden Benennungen für diese sowohl, wie für die folgenden Linien, verdanke ich der Güte sachkundiger und verehrter Freunde.

**) Historia problematis de cubi duplicatione sive de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas, auct. N. Th. Reimer. Goettingae 1798. 222. pag. 8.

Auflösung, und mein Verfahren diese Aufgabe durch eine Hyperbel aufzulösen, ist in Absch. I. §. 36. beschrieben. Indessen waren jene Bemühungen doch nicht ganz fruchtlos, denn sie führten mich auf zwey neue Methoden, die Ophiuride zu zeichnen, und auch auf zwey neue Instrumente, dieselbe damit zu construiren. Diese Instrumente sind Fig. 8 und Fig. 11. abgebildet.

Da nun meine Erwartung, auf jenem Wege neue krumme Linien zu finden, verfehlt war, und ich einmal den Vorsatz gefaßt hatte, wo möglich, noch mehrere derselben zu erfinden, um auch dadurch das Delische Problem aufzulösen: so nahm ich die Sache aufs neue und mehrmals vor. Nach vielem Suchen gelang es mir, noch zwey krumme Linien vom dritten Grade zu finden, wodurch jene Aufgabe auf eine neue Art aufgelös't werden kann. Die erste von diesen Linien ist in Absch. II. beschrieben und Fig. 15. gezeichnet. Sie kann der Aehnlichkeit wegen, die sie mit einem Schießbogen hat, Toxoïde (Bogenlinie) genannt werden. Die zweyte Linie ist in Absch. XI. erklärt und Fig. 17. abgebildet. Aus der Gleichung für diese Linie ergiebt sich, daß dieselbe die Neilische Parabel ist, weswegen man ihr also auch keinen neuen Namen beygelegt hat. Außer diesen beyden krummen Linien fand ich noch eine vom dritten Grade. Durch diese läßt sich eine geometrische Aufgabe leicht auflösen, deren Auflösung analytisch sehr beschwerlich seyn würde; auch kann man dadurch einige cubische Gleichungen construiren. Sie ist in Absch. III. beschrieben und Fig. 21. gezeichnet. Man kann dieselbe der Aehnlichkeit wegen, die sie mit einem Destillir-Kolben hat, besonders wenn er mit zwey Hälsen versehen wäre, Kukumaïde (Querkolbenlinie) nennen.

Außer diesen drey krummen Linien, habe ich noch funfzehn andere, theils vom dritten, theils vom vierten, sechsten, siebenten und achten Grade gefunden. Von diesen Linien ist die vierte Absch. IV. erklärt, und Fig. 24. gezeichnet. Sie hat viele Aehnlichkeit mit einer Zwiebel, die bekanntlich aus vielen übereinander liegenden Schichten besteht, und kann deswegen füglich Krommyoïde (Zwiebellinie) genannt werden. Die fünfte Linie ist Absch. V. beschrieben und Fig. 28. abgebildet. Sehr angemessen ist dafür der Name Didaktyloïde (Zweyfingerlinie). Die sechste Linie ist Abschn. VI. beschrieben und Fig. 32. gezeichnet. Man kann sie der Aehnlichkeit wegen Skyphoïde (Becherlinie) nennen. Die siebente Linie ist Absch. VII. erklärt und Fig. 43. gezeichnet. Sie mag Diloboïde (Zweyschotenlinie) heißen. Diese vier letzten Linien sind alle vom vierten Grade.

Da es sehr schwer ist, für so viele krumme Linien, wovon einige in ihrer Gestalt nur wenig von einander abweichen, passende Namen zu finden, so will ich die noch übrigen eilf Linien nach der Ordnung benennen, und dieselben: die achte, neunte, u. s. w. heißen.

Zu diesen letzten krummen Linien lassen sich eben so wie zu den ersten, Werkzeuge angeben, um dieselben durch stetige Bewegung eines Stiftes beschreiben zu können. Auch ist es nicht schwer, Aufgaben zu erdenken, welche sich dadurch auflösen lassen, wie ich dieses bey verschiedenen Anwendungen gezeigt habe; allein viele andere Beschäftigungen verstatten es mir nicht, mich jetzt weiter damit zu befassen. Sollte es mir aber in der Folge meine Lage erlauben, diesen Gegenstand von neuem wieder vornehmen zu können, um so wohl die merkwürdigsten Eigenschaften jener krummen Linien vollständiger zu untersuchen, als bis jetzt geschehen ist, als auch nützliche Anwendungen davon zu machen u. s. w.: so werde ich nicht unterlassen, dieses so fort bekannt zu machen, sonst überlasse ich es gern andern, wenn sie es für die Wissenschaft zuträglich finden, diese Untersuchungen weiter fortzusetzen und auszubilden.

Erster Abschnitt.

Erste krumme Linie.

Die Ophiuride (Schlangenschwanzlinie) und deren Anwendung.

I. Die Ophiuride zu zeichnen und durch ein Werkzeug zu beschreiben.

§. 1.

Es sey (Fig. 1.) OABCG eine gerade Linie, BD auf AC senkrecht, A und D gegebene Puncte. Durch D ziehe man nach Gefallen eine gerade Linie DC, welche OG in C schneidet; in C errichte man auf CD die senkrechte Linie CM, ferner ziehe man durch A, AM auf CM senkrecht: so ist M ein Punct in der Ophiuride. Auf diese Art kann man mehrere Linien, als DG, DN, DO u. s. w. ziehen, und so eine beliebige Anzahl Puncte wie F, a, b, u. s. w. bestimmen, und dieselben aus freyer Hand durch einen Zug verbinden.

Die Gleichung für diese krumme Linie wird leicht gefunden. Es sey AH und ME auf OG und MP auf AH senkrecht. Man setze $AB = a$, $BD = b$, $AP = EM = x$, $PM = AE = y$.

Da die Dreyecke AEM, MEC und CBD einander ähnlich sind, wie leicht zu beweisen ist, so hat man:

$$AE : EM = EM : EC, \text{ oder}$$
$$y : \ x = x : EC, \text{ also ist}$$

$$EC = \frac{x^2}{y}.$$

Ferner hat man: $EM : AE = BD : BC$, oder
$x : y = b : BC$, also ist

$$BC = \frac{by}{x}.$$

Nun ist $EB = AB - AE$, oder $EB = a - y$ und

$$EC = EB + BC, \text{ oder } EC = a - y + \frac{by}{x}.$$

Auch ist vorhin $EC = \frac{x^2}{y}$ gefunden; folglich ist

$$a - y + \frac{by}{x} = \frac{x^2}{y}, \text{ also, } axy - xy^2 + by^2 = x^3$$ die verlangte Gleichung.

Hieraus folget:

$$y^2 = -\frac{ax}{b-x}\, y + \frac{x^3}{b-x}, \text{ folglich}$$

$$y = -\frac{\frac{1}{2}ax}{b-x} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4}a^2x^2}{(b-x)^2} + \frac{x^3}{b-x}\right)}, \text{ oder}$$

$$y = -\frac{\frac{1}{2}ax}{b-x} \pm \frac{\sqrt{(\frac{1}{4}a^2x^2 + bx^3 - x^4)}}{b-x}, \text{ oder}$$

$$y = -\frac{\frac{1}{2}ax}{b-x} \pm \frac{x\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + bx - x^2)}}{b-x}.$$

Diese Gleichung läßt sich nach den Potenzen von x geordnet, auch so ausdrücken, als:

$$x^3 - (ay - y^2)\,x - by^2 = 0, \text{ oder auch}$$
$$x^3 + (y^2 - ay)\,x - by^2 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen, und auch aus der Zeichnung erhellet, daß die Ophiuride eine krumme Linie vom dritten Grade ist.

§. 2.

Die geraden Linien Fm und IP (Fig. 2.) schneiden sich unter einem rechten Winkel in A, und es seyn, wie in Fig. 1., A und D gegebene Puncte. Nun wird DB auf Fm senkrecht gezogen, und $AB = a$, $BD = b$ gesetzt, und nach §. 1. die Ophiuride QATLAMN gezeichnet. Ferner nehme man auf AP, $AC = BD = b$, und ziehe durch C die Linie GCR mit Fm parallel.

Um die merkwürdigsten Eigenschaften der Ophiuride kennen zu lernen, setze man in die §. 1. gefundene Gleichung

$y = \frac{-\frac{1}{2}ax}{b-x} \pm \frac{x\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + bx - x^2)}}{b-x}$, $x = 0$, so ist auch $y = 0$; die krumme Linie geht also durch A, wie sich auch aus der Zeichnung derselben ergiebt. Wird x größer als o und kleiner als b gesetzt, so ist bx größer als x^2; und $bx - x^2$ ist eine positive Größe: folglich ist $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + bx - x^2)}$ größer als $\frac{1}{2}a$. Es sey demnach $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + bx - x^2)} = \frac{1}{2}a + m$, so ist:

$$1)\ y = -\frac{\frac{1}{2}ax}{b-x} + \frac{(\frac{1}{2}a + m)x}{b-x}$$

$$2)\ y = \frac{-\frac{1}{2}ax}{b-x} - \frac{(\frac{1}{2}a + m)x}{b-x}.$$

Hieraus erhellt, daß der erste Werth von y positiv, und der zweyte negativ ist. Wird für diesen Fall $Ac = x$ gesetzt, und durch c die Linie hg mit FB parallel gezogen, und schneidet jene die krumme Linie in h und g: so ist cg der positive, und ch der negative Werth von y, welche zu der Absciße Ac gehören.

§. 3.

Es sey $x = AC = b$, so ist

$$y = -\frac{\frac{1}{2}ab}{b-b} \pm \frac{b\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2 - b^2)}}{b-b},\ \text{oder}$$

$$y = -\frac{\frac{1}{2}ab}{0} \pm \frac{\frac{1}{2}ab}{0},\ \text{also ist: } 1)\ y = \frac{-\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab}{0} = \frac{0}{0}.$$

$$2)\ y = \frac{-\frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}ab}{0} = \frac{-ab}{0} = -\infty.$$

Auf diese Art wird aber der erste Werth von y nicht gefunden, und scheint unbestimmt zu seyn; allein aus der Zeichnung ersieht man, daß derselbe Ci ist: folglich einen bestimmten Werth hat. Um diesen finden zu können, setze man $cC = r$. Nun ist

$$Ac = AC - cC, \text{ oder } Ac = b - r.$$

Es sey $Ac = x$, so ist $x = b - r$

$bx = b^2 - br$, $-\frac{1}{2}ax = \frac{1}{2}ar - \frac{1}{2}ab$

$b - x = r$, und $x^2 = b^2 - 2br + r^2$. Werden diese Werthe in die Gleichung

$$y = \frac{-\frac{1}{2}ax}{b-x} \pm \frac{x\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + bx - x^2)}}{b-x} \quad (\S.\ 1.)$$

gesetzt, so kommt

$$y = \frac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{2}ab}{r} \pm \left(\frac{b-r}{r}\right).\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + br - r^2)}.$$

Wird in dieser Gleichung r unendlich klein angenommen, so kann man r^2 gegen br weglassen. Drückt man alsdann die Größe unter dem Wurzelzeichen durch eine unendliche Reihe aus: so erhält man $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + br)} = \frac{1}{2}a + \frac{br}{a}$, wenn man das Quadrat und die höhern Potenzen von r, aus dem vorhin angegebenen Grunde, wegläßt. Folglich ist alsdann

$$y = \frac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{2}ab}{r} \pm \left(\frac{b-r}{r}\right).\left(\frac{1}{2}a + \frac{br}{a}\right),$$ und wenn man multiplicirt, und $\frac{b}{a}r^2$ wegläßt: so kommt

$$y = \frac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{2}ab}{r} \pm \left(\frac{\frac{1}{2}ab}{r} - \frac{1}{2}a + \frac{b^2}{a}\right),$$ folglich ist:

1) $y = \frac{b^2}{a} = Ci$, wenn man das obere Zeichen nimmt, und

2) $y = -\frac{ab}{r} + a - \frac{b^2}{a} = -\infty$, wenn das untere Zeichen genommen, und r unendlich klein gesetzt wird. Hieraus ergiebt sich: 1) daß wenn man zu AB und BD die dritte Proportionallinie sucht, diese gleich Ci ist; 2) daß GC die Asymptote für den Schenkel AQ ist; weil für $cC = r = 0$, ch in CG fällt, und alsdann nach dem Vorhergehenden $ch = y = -\infty$ wird: woraus also erhellt, daß GC die Asymptote für den genannten Schenkel ist.

§. 4.

Man setze in der §. 1. gefundenen Gleichung

$$y = \frac{-\frac{1}{2}ax}{b-x} \pm \frac{x\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + bx - x^2)}}{b-x}$$, x größer als b, so ist bx kleiner als x^2, und $bx - x^2$ ist eine negative Größe, folglich ist $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + bx - x^2)}$ kleiner als $\frac{1}{2}a$.

Es sey $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + bx - x^2)} = \frac{1}{2}a - m$, so ist:

$$1)\ y = \frac{\frac{1}{2}ax}{x-b} + \frac{(\frac{1}{2}a - m)x}{x-b}$$

$$2)\ y = \frac{\frac{1}{2}ax}{x-b} - \frac{(\frac{1}{2}a - m)x}{x-b}.$$

Hieraus erhellt, daß beyde Werthe von y positiv sind, und auch so lange möglich bleiben, als $\frac{1}{4}a^2 + bx$ größer als x^2 ist.

Dieses ergiebt sich auch aus der Zeichnung der krummen Linie; denn wird $Ad = x$ gesetzt, und durch d, dE mit Fm parallel gezogen, und schneidet jene die krumme Linie in q und E, so sind dq und dE die beyden Werthe von y, welche zu der Abscisse Ad gehören, und da diese Werthe rechter Hand der Axe A liegen: so folgt hieraus, daß dieselben positiv sind.

§. 5.

Setzt man $Cd = r$, so folgt nach dem in §. 3. gezeigten Verfahren, daß alsdann:

$$1)\ y = \frac{b^2}{a} = Ci$$

$$2)\ y = \frac{ab}{r} + a - \frac{b^2}{a} = + \infty \text{ ist.}$$

Hieraus ergiebt sich, daß CR die Asymptote für den Schenkel AMN ist; denn wird $Cd = r = o$ gesetzt, so fällt dE in CR, und weil alsdann $dE = y = \infty$ wird, wie eben gezeigt ist: so folgt bekanntlich hieraus, daß CR die Asymptote für den Schenkel AMN ist.

§. 6.

Dieses läßt sich auch aus der Zeichnung der Ophiuride herleiten. Es sey E ein Punct dieser krummen Linie; man ziehe AE, und mit derselben Dm parallel, welche Fm in m schneidet; ferner wird mE gezogen, und da die Dreyecke DBm und mEA einander ähnlich sind, wie leicht zu beweisen ist, so hat man folgende Proportion:

$$Dm : DB = Am : mE, \text{ also ist}$$

$$mE = \frac{Am}{Dm} \cdot DB.$$ Je größer nun Dm genommen wird, desto größer wird auch Am. Wird $DM = \infty$ gesetzt, so ist $Am = \infty + a$. Für diesen Fall ist $mE = \frac{\infty + a}{\infty} \cdot DB = DB$; weil $\infty + a = \infty$ ist. Ferner sey mN auf Fm senkrecht, so ist der Winkel $EmN = DmB$. Je größer nun Bm genommen wird, desto kleiner wird auch der Winkel DmB, folglich auch EmN. Wird $Bm = \infty$ gesetzt, so sind die Winkel $DmB = EmN = o$, und mE fällt mit mN zusammen. Aus diesen Betrachtungen folgt, daß je größer Am angenommen wird, sich der Punct E immer mehr und mehr der geraden Linie GR nähert, ohne solche zu erreichen, so lange Am noch eine endliche Größe ist, und daß daher jene Linie die Asymptote für den Schenkel AMN ist.

Auf eben dieselbe Art läßt sich auch zeigen, wenn die gehörigen Hülfslinien gezogen werden, daß RG die Asymptote für den andern Schenkel AQ ist.

§. 7.

Aus der Zeichnung der Ophiuride ersieht man, daß wenn Ad wächset und d nach P fortrückt, daß alsdann der eine Werth von $y = dq$ zu- und der andere dE abnimmt, und wenn PH mit Fm parallel gezogen wird und die

krumme Linie in M berührt, daß dann beyde Werthe von $y = PM$, und einander gleich sind.

In diesem Falle ist die Größe unter dem Wurzelzeichen in der Gleichung $y = \frac{-\frac{1}{2}ax}{b-x} \pm \frac{x\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + bx - x^2)}}{b-x}$, §. 1. gleich o; weil sonst y, gegen die Annahme, zwey verschiedene Werthe haben würde, folglich ist alsdann $y = \frac{-\frac{1}{2}a\,x}{b-x}$.

Es sey nun $\frac{1}{4}a^2 + bx - x^2 = o$, also $x^2 = bx + \frac{1}{4}a^2$, folglich

$$x = \tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{[\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}a^2]},\ \text{oder}$$

$$x = \tfrac{1}{2}b \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{[b^2 + a^2]},\ \text{also ist:}$$

$$1]\ x = \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}\sqrt{[b^2 + a^2]},$$

$$2]\ x = \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}\sqrt{[b^2 + a^2]}.$$

Wird $x^2 >$ als $bx + \frac{1}{4}a^2$ genommen, so wird $\frac{1}{4}a^2 + bx - x^2$ negativ, folglich ist alsdann y unmöglich. Daß der erste, von den beyden gefundenen Werthen von x, nämlich $x = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{[b^2 + a^2]} = AP$ ist, ist leicht einzusehen. Der zweyte Werth gehört zu dem Knoten ATLA, wie ich hernach zeigen will.

§. 8.

Nach Pytagoras Lehrsatz hat man in dem rechtwinklichten Dreyecke ABD:

$$AD^2 = BD^2 + AB^2,\ \text{oder}\ AD^2 = b^2 + a^2.$$

Es sey $AD = c$, so ist $c = \sqrt{[b^2 + a^2]}$, und die beyden vorhin [§. 7.] gefundenen Werthe von x sind alsdann:

$$1]\ x = \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c = \tfrac{1}{2}[b + c] = AP,$$

$$2]\ x = \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}c = -\tfrac{1}{2}[c - b].$$

Werden diese Werthe von x in die Gleichung $y = \frac{-\frac{1}{2}ax}{b-x}$, (§. 7.) gesetzt, so kommt:

$$1)\ y = \frac{-\frac{1}{2}a\ (\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c)}{b - (\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c)} = \frac{a\ (c + b)}{2\ (c - b)} = PM,$$

$$2)\ y = \frac{-\frac{1}{2}a(\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c)}{b - (\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c)} = \frac{a(c-b)}{2(c+b)}.$$

Da AB = a, BD = b und AD = c gesetzt worden sind, so ist:

$$AP = \tfrac{1}{2}(AD + BD), \text{ und}$$

$$PM = \frac{AB(AD+BD)}{2(AD-BD)}.$$

Hieraus ergiebt sich folgendes. Man verlängere AD nach O, und nehme DO = DB; wird nun AO in v halbirt, AP = Av genommen, und durch P, HP mit Am parallel gezogen: so berührt jene den Schenkel AMN in M. Sucht man ferner zu 2 [AD — BD], AD + BD, und AB die vierte Proportionallinie: so ist diese = PM. Auf diese Art läßt sich also der Berührungspunct M durch Construction bestimmen. Nimmt man AB unveränderlich an, und läßt man dagegen BD abnehmen: so nimmt auch AD ab und kommt AB immer näher. Für BD = 0 ist alsdann AP = $\frac{1}{2}$ AB, und $PM = \frac{AB \times AB}{2\,AB} = \frac{1}{2}AB$. In diesem Falle wird ein Theil von der Ophiuride ein Kreis, dessen Durchmesser gleich AB = a ist. Wird aber BD als wachsend angenommen, so wird auch AD größer, und AP = $\frac{1}{2}$ [AD + BD] nimmt beständig zu, und wird unendlich, wenn BD unendlich groß angenommen wird. In diesem Falle ist $PM = \frac{2\,AB.\,\infty}{2[\infty - \infty]} = AB.\,\infty^2$.

§. 9.

Nimmt man in der [§. 1.] gefundenen Gleichung für die Ophiuride

$$y = \frac{-\frac{1}{2}ax}{b-x} \pm \frac{x\sqrt{[\frac{1}{4}a^2 + bx - x^2]}}{b-x},$$ x negativ an, so läßt sich dieselbe so ausdrücken

$$y = \frac{\frac{1}{2}ax}{b+x} \mp \frac{x\sqrt{[\frac{1}{4}a^2 - bx - x^2]}}{b+x}.$$

In dieser Gleichung ist die Größe unter dem Wurzelzeichen kleiner als $\frac{1}{4}a^2$, weil man davon bx und x^2 subtrahiren muß.

Es sey demnach $\sqrt{[\frac{1}{4}a^2 - bx - x^2]} = \frac{1}{2}a - m$, so ist

$y = \frac{\frac{1}{2} ax}{b+x} \pm \frac{[\frac{1}{2} a - m] x}{b+x}$. Hieraus erhellet, daß beyde Werthe von y positiv sind, und so lange möglich bleiben, bis die Größe unter dem Wurzelzeichen, nämlich $\frac{1}{4} a^2 - bx - x^2 = 0$ wird, man sehe §. 7. In diesem Falle sind beyde Werthe von y einander gleich und man hat alsdann

$$y = \frac{\frac{1}{2} ax}{b+x}, \text{ und } x^2 = - bx + \frac{1}{4} a^2, \text{ folglich}$$

$$x = - \tfrac{1}{2} b \pm \sqrt{[\tfrac{1}{4} b^2 + \tfrac{1}{4} a^2]}, \text{ oder}$$

$$x = - \tfrac{1}{2} b + \tfrac{1}{2} \sqrt{[b^2 + a^2]}.$$ Wird nun, wie in §. 8. $\sqrt{[b^2 + a^2]} = c$ gesetzt, so ist:

$$1]\ x = \tfrac{1}{2} c - \tfrac{1}{2} b = \tfrac{1}{2} [c - b]$$

$$2]\ x = - \tfrac{1}{2} b - \tfrac{1}{2} c = - \tfrac{1}{2} [b + c].$$

Dieser erste Werth von x ist mit dem zweyten, und dieser zweyte mit dem ersten in §. 8. einerley. Der Unterschied in den Zeichen rührt daher, weil hier die Abscissen von A nach I als positiv angenommen sind, die in §. 8. negativ gesetzt wurden.

Wird nun in den Abstand $AI = \frac{1}{2} [c - b]$, durch I, IK mit Fm parallel gezogen, so berührt jene den Knoten ALT in L, wie sich aus dem Vorhergehenden leicht ergiebt.

Setzt man nun den ersten Werth von $x = AI = \frac{1}{2} c - \frac{1}{2} b$ in die vorhin gefundene Gleichung $y = \frac{\frac{1}{2} ax}{b-x}$, so kommt

$$y = \frac{\frac{1}{2} a [\frac{1}{2} c - \frac{1}{2} b]}{b + \frac{1}{2} c - \frac{1}{2} b} = \frac{a [c - b]}{2 [c + b]} = IL,$$ welches der zweyte Werth von y ist, der §. 8. gefunden worden.

Werden nun anstatt a, b und c die Linien AB, BD und AD gesetzt, so ist $AI = \frac{1}{2} [AD - BD]$,

$$IL = \frac{AB [AD - BD]}{2 [AD + BD]} \text{ und}$$

$AI + AP = PI = \frac{1}{2} AD + \frac{1}{2} BD + \frac{1}{2} AD - \frac{1}{2} BD$, §. 8. folglich

$$PI = AD.$$

Hieraus ergeben sich folgende Eigenschaften der Ophiuride. Man nehme auf AD, DZ = DB; wird nun AZ in w halbirt, AI = Aw genommen, und durch I, IK mit Fm parallel gezogen: so berührt jene den Knoten ALT in L. Sucht man zu 2 [AD + BD], AD — BD, und AB die vierte Proportionallinie, so ist diese = IL.

Werden ferner die Linien IK und PH mit Fm, in der Entfernung $IP = AD = \sqrt{[a^2 + b^2]}$ mit einander parallel gezogen, und berührt IK den Knoten in L: so berührt auch PH den Schenkel AMN in M, und die Ophiuride liegt ganz in dem Raume, den IK und PH begränzen.

Nimmt man auch hier, wie in §. 8., AB unveränderlich an, und läßt man BD abnehmen, so kommt für BD = o, AI = IL = $\frac{1}{2}$ AB.

Läßt man dagegen BD wachsen, so nehmen AI und IL ab; der Knoten wird immer kleiner und kleiner, je größer BD genommen wird. Eben dieses erfolgt, wenn man BD als unveränderlich annimmt und dagegen AB abnehmen läßt; wird AB = o, so verschwindet der Knoten ganz und zieht sich in einen Punct zusammen, und die krumme Linie bekommt alsdann bey A eine Spitze.

Dieses alles ergiebt sich auch, wenn man durch Zeichnung Puncte des Knotens sucht. Werden nämlich durch D, innerhalb des Winkels ADB, die Linien Da, Db u. s. w. gezogen, welche Am in a und b schneiden, errichtet man ferner auf Da und Db die senkrechten Linien at und bT, und zieht man von A aus auf jene die senkrechten At und AT: so sind t und T Puncte des Knotens. Auf diese Art kann man, wenn die Linien AB und BD von verschiedener Größe angenommen werden, jedesmal eine beliebige Anzahl Puncte des Knotens bestimmen, diese aus freyer Hand durch einen Zug verbinden, und sich so von den angegebenen Eigenschaften auch durch die Zeichnung überzeugen.

§. 10.

Man ziehe pq mit IP parallel, jene schneidet den Knoten in p und o, den Schenkel AMN in q und Fm in n. Es sey nun dq = An = y, so gehören zu diesem Werthe von y drey Werthe von x, nämlich nq, no und np. Diese sind die Wurzeln der §. 1. gefundenen Gleichung.

$$x^3 - [ay - y^2]\, x - b\, y^2 = o.$$

Da in dieser Gleichung das zweyte Glied fehlt, so ist bekanntlich die Summe der Wurzeln = o, und da die Linien no und np der

Linie nq entgegengesetzt sind, so kann man die beyden ersten als negativ und die letzte als positiv annehmen; folglich müssen no + np − nq = o seyn, also ist no + np = nq. Hieraus folgt auch, daß wenn ST mit PI parallel gezogen wird, und jene den Knoten in T berührt, den Schenkel AMN in S und Fm in U schneidet: daß alsdann US = 2 UT ist, denn in diesem Falle wird no = np = UT, und nq = US, folglich ist

$$UT + UT = 2\ UT = US.$$

§. 11.

Wenn ST den Knoten in T berührt, so hat die Gleichung $x^3 - [ay - y^2]\ x - by^2 = o$, zwey gleiche Wurzeln, jede = UT = $\frac{1}{2}$ US [§. 10.] Es soll für diesen Fall AU = y gefunden werden.

Bey dieser Voraussetzung ist $4\ [ay - y^2]^3 = 27\ [by^2]^2$. [S. Klügels mathematisches Wörterbuch 2ter Theil S. 390.]. Also ist

$4\ a^3\ y^3 - 12\ a^2\ y^4 + 12\ ay^5 - 4\ y^6 = 27\ b^2\ y^4$, folglich ist

$y^3 - 3\ a\ y^2 + 3\ a^2\ y + \frac{27}{4}\ b^2\ y - a^3 = o.$

Um aus dieser Gleichung das zweyte Glied wegzuschaffen, setze man $y = z + a$, so ist

$$\begin{aligned} y^3 &= z^3 + 3\ az^2 + 3\ a^2z + a^3 = o \\ -3\ ay^2 &= \quad - 3\ az^2 - 6\ a^2z - 3a^3 \\ +3\ a^2y &= \qquad + 3\ a^2z + 3a^3 \\ +\tfrac{27}{4}\ b^2y &= \qquad \tfrac{27}{4}\ b^2z + \tfrac{27}{4}\ b^2\ a \\ -\ a^3 &= \qquad\qquad - a^3. \end{aligned}$$

Folglich ist $z^3 + \frac{27}{4}\ b^2\ z + \frac{27}{4}\ b^2\ a = o.$

Man setze $\frac{1}{4}\ [\frac{27}{4}\ b^2\ a]^2 + \frac{1}{27}\ [\frac{27}{4}\ b^2]^3 = A^2$, so ist nach Cardans Regel $z = \sqrt[3]{[A - \frac{27}{8}\ b^2\ a]} - \sqrt[3]{[A + \frac{27}{8}\ b^2\ a]}$. Folglich ist

$$AU = y = \sqrt[3]{[A - \tfrac{27}{8}\ b^2\ a]} - \sqrt[3]{[A + \tfrac{27}{8}\ b^2\ a]} + a.$$

Aus diesen Formeln ergiebt sich, daß wenn AB = a unveränderlich gesetzt wird, AU desto größer wird, je kleiner man BD = b annimmt, und daß für BD = o, AU = a = AB ist.

§. 12.

Es sey AC (Fig. 1.) die Axe der Ophiuride, und $AB = a$, $BD = b$, $AE = x$, $EM = y$, so erhält man, wenn in der §. 1. gefundenen Gleichung x und y mit einander verwechselt werden,

$$x = \frac{\frac{1}{2}ay}{y-b} \pm \frac{y}{y-b}\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + by - y^2)}.$$

Aus der Zeichnung der Ophiuride ersieht man, daß der Schenkel AMN (Fig. 2.) im Anfange gegen die Axe Am concav ist, und hernach convex wird. Letzteres ergiebt sich auch daraus, daß CR die Asymptote des Schenkels AMN ist (§. 6.), und bekanntlich jede krumme Linie gegen dieselbe convex seyn muß. Hieraus folgt also, daß der Schenkel AMN einen Wendungspunct hat.

Es sey E (Fig. 2.) derselbe, und da für $Ad = y$, x zwey Werthe hat, nämlich: 1) $x = dq$; 2) $= dE$, so muß in der vorhin gefundenen Gleichung, wenn der Wendungspunct E gesucht werden soll, nur das obere Wurzelzeichen gebraucht werden. Diese Gleichung ist demnach

$$x = \frac{\frac{1}{2}ay}{y-b} + \frac{y}{y-b}\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + by - y^2)}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man nach den Regeln der Differential-Rechnung

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{1}{2}ab}{(y-b)^2} + \frac{y}{(y-b)}\cdot\frac{(\frac{1}{2}b - y)}{\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + by - y^2)}} - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + by - y^2)}\,\frac{b}{(y-b)^2}.$$

Man bringe alles auf einerley Benennung, so erhält man

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-\frac{1}{2}ab\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + by - y^2)}}{(y-b)^2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + by - y^2)}} + \frac{\frac{3}{2}by^2 - \frac{1}{2}b^2y - y^3}{(y-b)^2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + by - y^2)}} - \frac{b(\frac{1}{4}a^2 + by - y^2)}{(y-b)^2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + by - y^2)}},$$ oder

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-\frac{1}{2}ab\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + by - y^2)} + \frac{5}{2}by^2 - \frac{3}{2}b^2y - y^3 - \frac{1}{4}a^2b)}{(y-b)^2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + by - y^2)}}$$ und wenn man diesen Bruch umkehret, so kommt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y-b)^2 \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + by - y^2)}}{-\frac{1}{2}ab\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+by-y^2)} + \frac{5}{2}by^2 - \frac{3}{2}b^2y - y^3 - \frac{1}{4}a^2b.}$$

Die Differentiation dieses Quotienten sich zu erleichtern, setze man

$$(y-b)^2 \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + by - y^2)} = v, \text{ und}$$

$$-\frac{1}{2}ab\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+by-y^2)} + \frac{5}{2}by^2 - \frac{3}{2}b^2y - y^3 - \frac{1}{4}a^2b = w,$$

so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{v}{w}$. Wird dieser Differential-Quotient wieder differentiirt, und dx unveränderlich angenommen, wie dieses bekanntlich geschehen muß, wenn der Wendungspunct gefunden werden soll: so erhält man

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{wdv - vdw}{w^2}, \text{ und da } \frac{1}{dx} = \frac{v}{wdy} \text{ ist, so ist}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{v}{wdy}\right) \cdot \left(\frac{wdv - vdw}{w^2}\right), \text{ oder}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{v}{w^2}\left(\frac{dv}{dy} - \frac{v}{w} \cdot \frac{dw}{dy}\right), \text{ und da man } \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ setzen}$$

muß, wenn der Wendungspunct gefunden werden soll, so kommt

$$0 = \frac{v}{w^2}\left(\frac{dv}{dy} - \frac{v}{w} \cdot \frac{dw}{dy}\right), \text{ folglich}$$

$$0 = \frac{dv}{dy} - \frac{v}{w} \cdot \frac{dw}{dy}, \text{ mithin}$$

(A) $\frac{dv}{dy} = \frac{v}{w} \cdot \frac{dw}{dy}$. Nun ist nach dem Vorhergehenden

$$(y-b)^2 \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + by - y^2)} = v, \text{ folglich}$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{\frac{1}{2}b^3 - \frac{1}{2}a^2b - 4b^2y + \frac{1}{2}a^2y + \frac{13}{2}by^2 - 3y^3}{\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + by - y^2)}}$$

auch wurde $-\frac{1}{2}ab\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + by - y^2)} + \frac{5}{2}by^2 - \frac{3}{2}b^2y - y^3 - \frac{1}{4}a^2b = w$ gesetzt.

Hieraus erhält man

$$\frac{dw}{dy} = \frac{(5\,by - \frac{3}{2}\,b^2 - 3\,y^2)\sqrt{(\frac{1}{4}\,a^2 + by - y^2)} + \frac{1}{2}\,aby - \frac{1}{4}\,a\,b^2}{\sqrt{(\frac{1}{4}\,a^2 + by - y^2)}}.$$

Ferner ist

$$\frac{v}{w} = \frac{(y - b)^2\sqrt{(\frac{1}{4}\,a^2 + by - y^2)}}{\frac{5}{2}\,by^2 - \frac{3}{2}\,b^2y - y^3 - \frac{1}{4}\,a^2\,b - \frac{1}{2}\,ab\sqrt{(\frac{1}{4}\,a^2 + by - y^2)}}$$

Werden diese Werthe von $\frac{v}{w}$, $\frac{dw}{dy}$ und $\frac{dv}{dy}$ in die vorhin gefundene Gleichung A gesetzt, so erhält man

$$\frac{\frac{1}{2}\,b^3 - \frac{1}{2}\,a^2\,b - 4\,b^2\,y + \frac{1}{2}\,a^2\,y + \frac{13}{2}\,by^2 - 3\,y^3}{\sqrt{(\frac{1}{4}\,a^2 + by - y^2)}}$$

$$= \left[\frac{(y - b)^2\sqrt{(\frac{1}{4}\,a^2 + by - y^2)}}{\frac{5}{2}\,by^2 - \frac{3}{2}\,b^2\,y - y^3 - \frac{1}{4}\,a^2\,b - \frac{1}{2}\,ab\sqrt{(\frac{1}{4}\,a^2 + by - y^2)}}\right]$$

$$\times\left[\frac{(5\,by - \frac{3}{2}\,b^2 - 3\,y^2)\sqrt{(\frac{1}{4}\,a^2 + by - y^2)} + \frac{1}{2}\,aby - \frac{1}{4}\,ab^2)}{\sqrt{(\frac{1}{4}\,a^2 + by - y^2)}}\right]$$

und wenn man die Größe rechter Hand des Gleichheitszeichens oben und unten mit $\sqrt{(\frac{1}{4}\,a^2 + by - y^2)}$ dividirt, so kommt

$$\frac{\frac{1}{2}\,b^3 - \frac{1}{2}\,a^2\,b - 4\,b^2\,y + \frac{1}{2}\,a^2\,y + \frac{13}{2}\,by^2 - 3\,y^3}{\sqrt{(\frac{1}{4}\,a^2 + by - y^2)}}$$

$$= \frac{(y - b)^2\,[(5\,by - \frac{3}{2}\,b^2 - 3\,y^2)\sqrt{(\frac{1}{4}\,a^2 + by - y^2)} + \frac{1}{2}\,aby - \frac{1}{4}\,ab^2]}{\frac{5}{2}\,by^2 - \frac{3}{2}\,b^2\,y - y^3 - \frac{1}{4}\,a^2\,b - \frac{1}{2}\,ab\sqrt{(\frac{1}{4}\,a^2 + by - y^2)}}$$

Um aus dieser Gleichung die Brüche wegzuschaffen, multiplicire man die Größe rechter Hand des Gleichheitzeichens oben und unten mit 4, und die Größe linker Hand desselben oben und unten mit 2, so kommt

$$\frac{b^3 - a^2\,b - 8\,b^2\,y + a^2\,y + 13\,by^2 - 6\,y^3}{2\sqrt{(\frac{1}{4}\,a^2 + by - y^2)}}$$

$$= \frac{(y - b)^2\,[(20\,by - 6\,b^2 - 12\,y^2)\sqrt{(\frac{1}{4}\,a^2 + by - y^2)} + 2\,aby - ab^2]}{10\,by^2 - 6\,b^2\,y - 4\,y^3 - a^2\,b - 2\,ab\sqrt{(\frac{1}{4}\,a^2 + by - y^2)}}$$

Zur Abkürzung sey $\frac{1}{4}a^2 + by - y^2 = m$, $y - b = n$

$b^3 - a^2 b - 8b^2 y + a^2 y + 13 by^2 - 6y^3 = o$

$20 by - 6 b^2 - 12 y^2 = p$, $2 aby - ab^2 = q$

$10 by^2 - 6 b^2 y - 4 y^3 - a^2 b = r$, so bekommt man

$$\frac{o}{2\sqrt{m}} = \frac{n^2 [p\sqrt{m} + q]}{r - 2ab\sqrt{m}} \text{ oder } \frac{o}{2\sqrt{m}} = \frac{n^2 p\sqrt{m} + n^2 q}{r - 2ab\sqrt{m}}, \text{ folglich}$$

$or - 2 abo\sqrt{m} = 2 n^2 pm + 2 n^2 q\sqrt{m}$, also

$or - 2 n^2 pm = (2 abo + 2 n^2 q)\sqrt{m}$, und wenn man auf beyden Seiten quadriret, so kommt

$(or - 2 n^2 pm)^2 = (2 abo + 2 n^2 q)^2 m$, folglich ist

(A) $(or - 2 n^2 pm)^2 - (2 abo + 2 n^2 q)^2 m = o$

Werden nun die vorher durch p und m bezeichneten Größen, mit einander multiplicirt, so bekommt man

$pm = -\frac{3}{2} a^2 b^2 - 6 b^3 y - 3 a^2 y^2 + 5 a^2 by + 26 b^2 y^2 - 32 by^3 + 12 y^4$

und da $2 n^2 = 2 y^2 - 4 by + 2 b^2$ ist, so ist

$2 n^2 pm = - 3 a^2 b^4 - 12 b^5 y + 16 a^2 b^3 y + 76 b^4 y^2 - 29 a^2 b^2 y^2 + 22 a^2 by^3 - 180 b^3 y^3 + 204 b^2 y^4 - 6 a^2 y^4 - 112 by^5 + 24 y^6$,

Ferner ist

$or = - a^2 b^4 + a^4 b^2 + 58 b^4 y^2 - 6 b^5 y + 14 a^2 b^3 y - 29 a^2 b^2 y^2 - 162 b^3 y^3 + 20 a^2 by^3 - a^4 by + 198 b^2 y^4 - 4 a^2 y^4 - 112 by^5$,

folglich

$or - 2 n^2 pm = 2 a^2 b^4 + a^4 b^2 + 6 b^5 y - 2 a^2 b^3 y - a^4 by - 18 b^4 y^2 + 18 b^3 y^3 - 2a^2 by^3 + 2 a^2 y^4 - 6 b^2 y^4$

Werden diese Größen, auf beyden Seiten des Gleichheitszeichens quadrirt, so erhält man

$$\begin{aligned}(or - 2n^2 pm)^2 = {} & + 4 a^4 b^8 + 24 a^2 b^9 y + 36 b^{10} y^2 + 144 a^2 b^7 y^3 \\ & + 4 a^6 b^6 + 4 a^4 b^7 y - 96 a^2 b^8 y^2 + 64 a^4 b^5 y^3 \\ & + a^8 b^4 - 8 a^6 b^5 y - 44 a^4 b^6 y^2 - 216 b^9 y^3 \\ & - 2a^8 b^3 y + 4 a^6 b^4 y^2 - 4 a^6 b^3 y^3 \\ & + a^8 b^2 y^2\end{aligned}$$

$$-32a^4b^4y^4 + 120a^2b^5y^5 + 540b^6y^6 + 96a^2b^3y^7 + 4a^4y^8$$
$$+540b^8y^4 - 720b^7y^5 - 144a^2b^4y^6 - 216b^5y^7 - 24a^2b^2y^8$$
$$-120a^2b^6y^4 - 4a^6by^5 + 4a^4b^2y^6 - 8a^4by^7 + 36b^4y^8$$
$$+8a^6b^2y^4 + 4a^4b^3y^5$$

Ferner ist

$$2abo = 2ab^4 - 4a^3b^2 - 16ab^3y + 2a^3by + 26ab^2y^2 - 12aby^3$$

und $2n^2q = 4aby^3 - 10ab^2y^2 + 8ab^3y - 2ab^4$, folglich ist

$$2abo + 2n^2q = -2a^3b^2 - 8ab^3y + 2a^3by + 16ab^2y^2 - 8aby^3$$

und quadrirt

$$\begin{aligned}(2abo+2n^2q)^2 = 4a^6b^4 &+ 32a^4b^5y + 64a^2b^6y^2 + 96a^4b^3y^3 + 384a^2b^4y^4\\ &- 8a^6b^3y - 96a^4b^4y^2 - 256a^2b^5y^3 - 32a^4b^2y^4\\ &+ 4a^6b^2y^2 - 256a^2b^3y^5 + 64a^2b^2y^6\end{aligned}$$

Diese Größen auf beyden Seiten des Gleichheitszeichens mit $m = \frac{1}{4}a^2 + by - y^2$ multiplicirt, giebt

$$\begin{aligned}(2abo+2n^2q)^2m = a^8b^4 &+ 12a^6b^5y - 36a^6b^4y^2 - 192a^4b^5y^3 - 320a^2b^6y^4\\ &- 2a^8b^3y + 48a^4b^6y^2 + 36a^6b^3y^3 + 288a^4b^4y^4\\ &+ a^8b^2y^2 + 64a^2b^7y^3 - 12a^6b^2y^4\\ &- 192a^4b^3y^5 - 640a^2b^4y^6 + 320a^2b^3y^7 - 64a^2b^2y^8\\ &+ 640a^2b^5y^5 + 48a^4b^2y^6\end{aligned}$$

Werden diese Werthe von $(2abo + 2n^2q)^2m$ und $(or - 2n^2pm)^2$ in die vorhin gefundene Gleichung A gesetzt, so erhält man nach gehöriger Reduction

$$\left.\begin{matrix}4a^4\\40a^2b^2\\36b^4\end{matrix}\right\}y^8 \left.\begin{matrix}-224a^2b^3\\-216b^5\\-8a^4b\end{matrix}\right\}y^7 \left.\begin{matrix}+540b^6\\+496a^2b^4\\-44a^4b^2\end{matrix}\right\}y^6$$

$$\left.\begin{matrix}-520a^2b^5\\-720b^7\\-4a^6b\\+196a^4b^3\end{matrix}\right\}y^5 \left.\begin{matrix}-320a^4b^4\\+540b^8\\+200a^2b^6\\+20a^6b^2\end{matrix}\right\}y^4 \left.\begin{matrix}+80a^2b^7\\+256a^4b^5\\-40a^6b^3\\-216b^9\end{matrix}\right\}y^3$$

$$\left.\begin{matrix}+36b^{10}\\-96a^2b^8\\-92a^4b^6\\+40a^6b^4\end{matrix}\right\}y^2 \left.\begin{matrix}+24a^2b^9\\-4a^4b^7\\-20a^6b^5\end{matrix}\right\}y \begin{matrix}+4a^6b^6\\+4a^4b^8 = 0.\end{matrix}$$

Diese Gleichung läßt sich durch

$4y^5 - 20by^4 + 40b^2y^3 - 40b^3y^2 + 20b^4y - 4b^5$ dividiren, und geschieht dieses, so erhält man:

$$\text{(B)}\quad \left.\begin{array}{r} a^4 \\ 10a^2b^2 \\ 9b^4 \end{array}\right\} y^3 \left.\begin{array}{r} -\,6a^2b^3 \\ -\,9b^5 \\ +\,3a^4b \end{array}\right\} y^2 \left.\begin{array}{r} -\,6a^2b^4 \\ -\,6a^4b^2 \end{array}\right\} y \begin{array}{r} -\,a^6b \\ -\,a^4b^3 = 0. \end{array}$$

Setzt man in dieser Gleichung $a = 4$ und $b = 1$ so erhält man:

$$425y^3 + 663y^2 - 1632y - 4352 = 0.$$

Wird diese Gleichung durch 425 dividirt, so kommt:

$$y^3 + \frac{39y^2}{25} - \frac{96y}{25} - \frac{256}{25} = 0$$

Um aus dieser Gleichung die Brüche wegzuschaffen, setze man

$$y = \frac{u}{25}, \quad \text{so ist} \quad y^2 = \frac{u^2}{625} \text{ und } y^3 = \frac{u^3}{15625}$$

Werden diese Werthe von y, y^2 und y^3 in die letzte Gleichung gesetzt, so kommt

$$\frac{u^3}{15625} + \frac{39}{25}\cdot\frac{u^2}{625} - 96\,\frac{u}{25} - \frac{256}{25} = 0, \text{ folglich ist}$$

$$u^3 + 39u^2 - 2400u - 160000 = 0.$$

Um aus dieser Gleichung das zweyte Glied wegzuschaffen, setze man $u = z - 13$, so ist

$$\begin{array}{rcrrrr} u^3 & = & z^3 - 39z^2 & +\ 507z & - & 2197 \\ +\ 39u^2 & = & +\ 39z^2 & -\ 1014z & + & 6591 \\ -\ 2400u & = & & -\ 2400z & + & 31200 \\ -\ 160000 & = & & & - & 160000 \\ \hline \text{Folglich} & & z^3 & -\ 2907z & - & 124406 = 0. \end{array}$$

Man setze $\frac{1}{4}(124406)^2 - \frac{1}{27}(2907)^3 = A^2$, so ist nach Cardans Regel

$$z = \sqrt[3]{\left(\frac{124406}{2} + A\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{124406}{2} - A\right)}$$

$$\begin{array}{rcr} \text{Nun ist } \frac{1}{4}(124406)^2 & = & 3869213209 \\ \frac{1}{27}(2907)^3 & = & 909853209 \\ \hline \text{Folglich } A^2 & = & 2959360000 \\ \text{und } A & = & 54400. \end{array}$$

Ferner ist

D 2

$$\sqrt[3]{\left(\frac{124406}{2} + 54400\right)} = 48{,}8539, \text{ und}$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{124406}{2} - 54400\right)} = 19{,}8344.$$

Folglich ist $z = 68{,}6883$, $u = z - 13 = 55{,}6883$, und $y = \frac{u}{25} = 2{,}2275$.

Da $x = \frac{\frac{1}{2}ay}{y-b} + \frac{y}{y-b}\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + by - y^2)}$ ist, so ist, für $a = 4$ und $b = 1$; $y = 2{,}2275$, folglich

$$x = \frac{4{,}455}{1{,}2275} + \frac{2{,}2275}{1{,}2275}\sqrt{(1{,}286585)}, \text{ oder}$$

$$x = \frac{4{,}455}{1{,}2275} + \frac{2{,}2275}{1{,}2275} \times 1{,}1342, \text{ oder}$$

$$x = 3{,}54786 + 2{,}05816 = 5{,}60602.$$

Wird nun in Fig. 2, für $AB = 4$ und $BD = 1$, $An = x = 5{,}60602$, und $nE = y = 2{,}2275$ genommen: so ist E der Wendungspunct.

Aus dieser Berechnung ersieht man, wie sehr mühsam es gewesen ist, den Wendungspunct durch die Differential-Rechnung zu finden. Auf folgende Art läßt sich derselbe, besonders wenn keine große Genauigkeit verlanget wird, durch Näherung leichter finden. Man ziehe durch E die Tangente ef, welche die verlängerte Am in f schneidet, ferner ziehe man Eu auf Af senkrecht: so ist uf die Subtangente. Diese ist $= y\frac{dx}{dy}$, wie sich bekanntlich aus den Regeln der Differential-Rechnung ergiebt.

Wird demnach der vorhin gefundene Quotient
$\frac{dx}{dy} = \frac{-\frac{1}{2}ab}{(y-b)^2} + \frac{y}{y-b} \cdot \frac{\frac{1}{2}b - y}{\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + by - y^2)}} - \frac{b}{(y-b)^2} \cdot \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + by - y^2)}$, auf beyden Seiten des Gleichheitszeichens mit y multiplicirt: so erhält man

$$y\frac{dx}{dy} = uf = -\frac{\frac{1}{2}aby}{(y-b)^2} + \frac{y^2}{y-b}\,\frac{\frac{1}{2}b - y}{\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + by - y^2)}} - \frac{by}{y-b} \cdot \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + by - y^2)}.$$

Zeichnet man die Ophiuride, und wird an dieselbe ein Lineal gelegt, so kann man hierdurch ziemlich genau sehen, wo der Uebergang vom Concaven zum Convexen ist; und da bekanntlich dieser Uebergang in dem Wendungspunct geschieht: so kann man durch dies Verfahren denselben, eben so wie auch Eu, beynahe finden. Es sey AB = a = 4, BD = b = 1, so ist uE = y ein wenig größer als 2.

Werden diese Werthe von a und b in die vorhin gefundene Gleichung gesetzt, so kommt:

$$y\frac{dx}{dy} = uf = -\frac{2y}{(y-1)^2} + \frac{y^2}{y-1} \cdot \frac{\frac{1}{2} - y}{\sqrt{(4+y-y^2)}} - \frac{y}{y-1}\sqrt{(4+y-y^2)},$$

und wenn man hierin Eu = y = 2 setzt, so ist $y\frac{dx}{dy} = uf = -4 - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -11{,}0710680.$

Aus diesen gefundenen Werthen von uf und Eu läßt sich in dem rechtwinklichten Dreyecke Euf, der Winkel uEf leicht finden.

Dieser Winkel uEf ist bekanntlich am kleinsten, wenn die Tangente ef durch den Wendungspunct geht. Nimmt man nun für y mehrere Werthe an, die nur wenig von einander abweichen, und sucht man für jeden Werth von y, auch uf, und hieraus die verschiedenen Winkel uEf: so geht die Ordinate uE, wenn dazu der kleinste Winkel gehört, durch den Wendungspunct.

Es sey y = 2,3,	so ist uf = − 11,795	und uEf =	78° 57′ 57″
— — y = 2,2	— — — = − 10,356	— — =	78° 0′ 23″
— — y = 2,1	— — — = − 10,887	— — =	79° 4′ 56″
— — y = 2,0	— — — = − 11,071	— — =	79° 45′ 35″.

Hieraus ersieht man, daß in diesen vier berechneten Fällen der Winkel uEf am kleinsten ist, wenn y = uE = 2, 2 genommen wird. Will man uE noch genauer haben, so muß man dafür einen Werth annehmen, der zwischen 2, 3 und 2, 2 enthalten ist, und alsdann, wie vorhin, den dazu gehörigen Winkel berechnen; ist dieser kleiner wie der vorhergehende, so hat man auch uE noch genauer.

Auf diese Art kann man durch Interpoliren Zahlen finden, welche dem

wahren Werth von uE, wenn derselbe noch nicht gefunden ist, immer näher und näher kommen.

Wird in der vorhin gefundene Gleichung $x = \frac{\frac{1}{2}ay}{y-b} + \frac{y}{y-b}$ $\surd(\frac{1}{4}a^2 + by - y^2)$, $a = 4$, $b = 1$, und $y = 2, 2$ gesetzt, so erhält man $x = 3{,}6666 + 2{,}1378 = 5{,}8044$.

Nimmt man nun $Au = 5{,}8044$ und $uE = 2, 2$, so ist E der Wendungspunct, wenn die Ordinate uE die vorhin angegebene Eigenschaft besitzt, daß der dazu gehörige Winkel uEf der kleinste ist.

§. 13.

Diese bisher betrachtete krumme Linie läßt sich durch stetige Bewegung eines Stiftes auf folgende Art beschreiben.

Man setze (Fig. 3.) vier Lineale AB, AC, BD und EF rechtwinklicht zusammen. Die drey ersten werden bey A und B mit einander fest verbunden, das letzte EF bleibt beweglich, und läßt sich an den Linealen AC und BD parallel mit AB auf- und abschieben. Gedachtes Lineal EF ist doppelt so dick, wie die Lineale AC und BD; es hat oben zwey Ansätze, wie aus der Zeichnung zu ersehn ist. In diesen Ansätzen sind Rinnen oder Falzen befindlich, worin die Lineale AC und BD genau passen. Auf diese Art wird das Lineal EF in einem jeden beliebigen Abstand von dem Lineal AB, parallel mit demselben bleiben müssen. Ferner wird an den Lineal AB ein Stift L befestiget, der nach unten geht, und bestimmt ist, sich in einer Rinne GH zu bewegen. An dem Lineal EF ist ebenfalls ein Stift K befestigt, welcher die krumme Linie beschreibt. Dieser Stift muß so angebracht werden, daß KL auf AB senkrecht ist.

Um uns der eben beschriebenen Vorrichtung zu unserer Absicht bedienen zu können, ist noch ein Reißbrett nothwendig. Es wird am besten aus zwey Stücken zusammengesetzt, zwischen welchen eine Rinne GH bleibt. Genannte zwey Stücke können mit Schrauben auf ein Brett befestigt werden; alsdann ist man im Stande, der Rinne GH die erforderliche Weite zu geben, damit der Stift L genau darin passe. Endlich wird in der Rinne GH noch ein Stift I befestiget.

Dieses beschriebene Werkzeug wird auf folgende Art gebraucht. In der Weite IN = AB Fig. 1. ziehe man NM auf GH senkrecht, und nehme NM

= BD in Fig. 1. In dem Endpunct M wird ein Stift eingeschlagen. Nunmehr wird das Lineal AB um den Stift M so gedrehet, daß es beständig an demselben anliegt, indem sich der Stift L in der Rinne GH von L nach N bewegt. Während dieser Bewegung muß das Lineal EF beständig an den Stift I gedrückt werden; alsdann beschreibt der Stift K die krumme Linie KOI, und indem sich der Stift L von N nach I bewegt, beschreibt der Stift K den Knoten.

Soll auch der Schenkel IO beschrieben werden: so muß man entweder das Werkzeug umkehren und die Stifte alsdann gehörig einsetzen, oder es müssen die Lineale AC und BD von doppelter Länge genommen werden, und auch auf der andern Seite des Lineals AB hervorstehen; auf jene wird alsdann das Lineal EF geschoben ꝛc., wie sich bey der Anwendung dieses Werkzeugs leicht findet.

Es ist leicht einzusehen, daß diese Linie KOI Fig. 3. mit der in Fig. 1. durch Puncte gefundenen FMA einerley ist, indem hier bey K und L, dort bey M und C rechte Winkel sind. Ferner sind die Linien ML, LK und KI Fig. 3. den Linien DC, CM und MA in Fig. 1. völlig gleich und gleichliegend.

Bey der Ausführung des jetzt beschriebenen Instruments ist vorzüglich dahin zu sehen, daß die Stifte I, K, L und M von gleicher Dicke gemacht werden, und die Spitze des Stifts K genau in der Mitte desselben befindlich sey. Der Stift K hat unten einen Schraubengang, und wird in ein Stück Messing eingeschroben, welches mit zwey Schrauben, von unten an das Lineal EF befestigt wird. Die Spitze des Stifts K ist unten etwas konisch, und nachdem dieselbe weniger oder mehr durch das genannte Stück Messing hervorsteht, werden die damit gezogenen Linien feiner oder stärker. Die Schraube dient dazu, den Stift nach Gefallen zu stellen. Fig. 4. ist der Stift K mit einem Stücke von dem Lineal FE vergrößert abgebildet.

Die Länge der Linien IN, NM u. s. w. werden von dem Mitttlpunct der Stifte an gemessen, alsdann verursacht die Dicke derselben keine Unrichtigkeit. Indessen ist es doch für die Ausübung in mehr als einer Hinsicht gut, dieselben so fein wie möglich zu machen. Werden die Stifte von Stahl verfertigt, so kann man sie so dünn wie eine feine Nähnadel uehmen.

Damit die Lineale AC und BD in den vorhin genannten Falzen ohne Spielraum passen, ist an jedem Ansatz eine bewegliche Leiste, die mit Schrauben gehörig festgestellt werden kann, angebracht. Daß die Lineale AC und BD genau von gleicher Breite sind, um jeden Spielraum zu vermeiden, ist durchaus

nothwendig. Werden diese Lineale durch ein paar feine Feilen, die in der erforderlichen Weite durch Schrauben befestigt werden können, hin und hergezogen: so ist man dadurch im Stande, dieselben vollkommen von gleicher Breite zu erhalten. Auch ist es gut, die vorhin erwähnten Ansätze nicht zu kurz zu machen; denn je länger dieselben genommen werden, um so genauer bleiben die Lineale EF und AB, selbst bey einem etwaigen Spielraum mit einander parallel. Am besten wird es wohl seyn, die vier Lineale von gleicher Länge, und jeden Ansatz halb so lang, wie eins von denselben zu nehmen.

II. Von der Verdoppelung des Würfels durch die Ophiuride (Schlangenschwanzlinie.)

§. 14.

Vermittelst jener krummen Linie, der Ophiuride, läßt sich die Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels auflösen, d. ist., die Seite eines Würfels finden, welcher doppelt so groß ist, als ein gegebener. Es muß aber vorher dargethan werden, daß es bey der geometrischen Auflösung derselben auf Erfindung zweyer mittlern Proportionallinien ankommt. Dieses werde ich arithmetisch und auch geometrisch zeigen, und alsdann zu oben genannter Auflösung übergehn.

Es sey a die Seite des gegebenen Würfels, so ist sein Inhalt $= a^3$; x die Seite des gesuchten Würfels, welcher doppelt so groß ist als der gegebene, so ist sein Inhalt $= x^3$, man hat also folgende Gleichung:

$x^3 = 2\,a^3$ aufzulösen. Folglich ist

$x = \sqrt[3]{2\,a^3}$, oder $x = a\sqrt[3]{2}$; da die

$\sqrt[3]{2} = 1{,}259\ldots$, so ist $x = 1{,}259\ldots\, a$.

Die arithmetische Auflösung dieser Aufgabe, hat also für uns gar keine Schwierigkeit, wenn a als Zahlengröße gegeben ist. Den Alten waren solche Auflösungen schwer, weil sie die Kunstgriffe nicht kannten, durch welche wir jetzt dergleichen Rechnungen leicht vollführen, und es waren ihnen deswegen geometrische Constructionen nöthig, welche sie auch wegen ihrer intellectuellen Vollkommenheit der arithmetischen Annäherung vorzogen.

§. 15.

Sucht man zwischen zwey gegebenen Linien a und b zwey mittlere Proportionallinien, und nennet die erste $= x$, so heißen die vier Linien nach einander $a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}$ die letzte aber ist $= b$, also hat man

$\frac{x^3}{a^2} = b$, oder $x^3 = ba^2$, also $x = \sqrt[3]{ba^2}$, wird $b = 2a$ genommen, so ist $x^3 = 2a^3$.

Diese Gleichung kommt mit der vorhin (§. 14.) gefundenen überein. Man sieht also hieraus, daß es bey der geometrischen Auflösung der Verdoppelung des Würfels nur darauf ankommt, zwischen zwey gegebenen Linien zwey mittlere Proportionallinien zu finden. Ist also die Linie a die Seite des gegebenen Würfels, so ist die erste Proportionale x, welche zwischen den Linien a und 2 a liegt, die Seite des gesuchten Würfels, welcher doppelt so groß ist, als der gegebene.

§. 16.

Dieses läßt sich auch geometrisch auf folgende Art zeigen. Man ziehe (Fig. 1.) AB auf BD senkrecht, und verlängere AB bis G, und BD bis F. Wenn nun AFG und FGD zwey ähnliche und rechtwinklichte Dreyecke sind, so hat man folgende bekannte Proportionen:

$AB : BF = BF : BG = BG : BD$, folglich sind die vier Linien:

$AB : BF : BG : BD$ in stetiger Proportion.

Ist demnach AB die Seite des gegebenen Würfels, und $BD = 2\,AB$: so ist BF die Seite des gesuchten Würfels, welcher doppelt so groß ist als der gegebene; denn weil

$$AB : BF = BF : BG, \text{ so ist}$$

$$BG = \frac{BF^2}{AB}.$$

Weil ferner:

$$BF : BG = BG : BD, \text{ oder}$$

$$BF : \frac{BF^2}{AB} = \frac{BF^2}{AB} : BD, \text{ so ist}$$

$$BD = \frac{BF^3}{AB^2}, \text{ und wenn}$$

$$BD = 2\,AB \text{ ist, so ist } 2\,AB = \frac{BF^3}{AB^2}, \text{ oder } 2\,AB^3 = BF^3.$$

§. 17.

Aufgabe. Zwischen zwey gegebenen Linien AB und BD (Fig. 1.) zwey mittlere Proportionallinien zu finden.

Auflösung. Man setze AB und BD rechtwinklicht zusammen; alsdann beschreibe man nach der vorher gegebenen Anweisung die Ophiuride AMF. Nun wird BD so weit verlängert, bis dieselbe AMF in F schneidet. Auf AF errichte man die senkrechte Linie FG, welche die verlängerte AB in G schneidet: so sind BF und BG die beyden verlangten mittleren Proportionallinien; denn da die Dreyecke ABF, FBG und GBD ähnliche Dreyecke sind, so hat man:

AB : BF = BF : BG = BG : BD, also sind die Linien

AB : BF : BG : BD vier stetige Proportionallinien.

Wird BD = 2 AB genommen, und ist AB die Seite eines gegebenen Würfels, so ist BF die Seite eines Würfels der doppelt so groß ist als der gegebene, mithin dadurch das Delische Problem aufgelös't.

§. 18.

Nimmt man BD = 3 AB, und wird AB, wie vorhin, als die Seite des gegebenen Würfels genommen: so ist BF die Seite eines Würfels, der dreymal so groß ist, als der gegebene, u. s. w.

§. 19.

Da sich der Inhalt der Kugeln, wie die Würfel ihrer Durchmesser verhalten: so kann die vorhin beschriebene Vorrichtung auch dazu gebraucht werden, aus dem gegebenen Durchmesser einer Kugel den Durchmesser einer andern zu finden, welche doppelt, dreymal, viermal u. s. w. so groß ist als eine gegebene.

§. 20.

Nunmehr ist noch zu untersuchen, mit welcher Genauigkeit man mit dieser Vorrichtung die verlangten Proportionalen finden kann. Wird das Reißbrett mit feinem, dichten Papier überzogen und aufgeleimet, so daß es sich gar nicht verschieben kann; bedient man sich ferner guter Stangen- und Federzirkel, auch genauer Maßstäbe, die den Zoll in 100 Theile getheilt, enthalten: so ist man im Stande, mit Zuziehung eines Vergrößerungsglases von etwa 2 Zoll Brennweite, die Weite BF (Fig. 1.) bis auf $\frac{1}{100}$ eines Zolls zu bestimmen. Durch wiederholte Versuche und Vergleichung derselben mit der Berechnung habe ich mich davon überzeugt.

Wollte man aber, anstatt des Papiers, worauf die Linie zu ziehen, dazu Messing nehmen, und sich dann solcher Vorrichtungen bedienen, wie sich Bird und Brander bey ihrer Theilungs-Methode bedient haben: so würde man vielleicht die vorhin erwähnte Weite auf $\frac{1}{1000}$ eines Zolls genau bestimmen können.

§. 21.

Nimmt man die Seite des gegebenen Würfels zu 10 Zoll an, so würde man hiernach die Seite des Würfels, welcher doppelt so groß ist = 12,599 Zoll finden. Nach diesem Verfahren würde man auf 100 Fuß nicht über $\frac{1}{10}$ Zoll, und nach der zuerst angenommenen Genauigkeit, nicht über 1 Zoll fehlen.

Nach diesen Betrachtungen u. s. w. wird man annehmen können, daß diese beschriebene krumme Linie in Absicht der Construction nach dem Kreise eine der einfachsten ist, und die Conchoide an die Seite gesetzt werden kann.

III. Von einigen mechanischen Constructionen der Alten, den Würfel zu verdoppeln, und von verschiedenen Instrumenten, um diese Aufgaben dadurch ohne Versuche aufzulösen.

§. 22.

Apollonius von Pergä Auflösung.

Auf die Schenkel eines rechten Winkels ECF (Fig. 6.) trage man die beyden äußeren der vier Proportionalen DC und BC von dem Scheitelpuncte

aus, und vollende das Parallelogramm ABCD. Alsdann ziehe man die Diagonalen AC und BD, die sich in dem Puncte G schneiden. Nun wird an den Punct A ein Lineal FAE so gelegt, daß GF = GE wird, welches man durch wiederholtes Herumdrehen des Lineals um den Punct A, und durch Messen der Linien GF und GE bewerkstelligen kann. Ist dieses geschehen, so sind die Linien AB : BE : DF : AD oder DC : BE : DF : BC in stetiger Proportion (Reimer Historia problematis etc. pag. 104).

§. 23.

Ohne Probiren läßt sich das Gesuchte auf folgende Art finden. Es seyn wie vorhin DC und BC (Fig. 7.) die beyden äußern Proportionalen, und ABCD das Parallelogramm derselben. Man halbire AD in I und DC in H, und errichte die senkrechten Linien IG und HG, die sich in G schneiden: alsdann ist $GH = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} BC$ und $IG = DH = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} AB$. Durch A ziehe man nach Gefallen die gerade Linie AF, und verlängre dieselbe rückwärts nach M; nun nehme man GM = GF: so ist M ein Punct in der krummen Linie AME. Auf diese Art kann man eine beliebige Anzahl Puncte der Linie bestimmen, und diese aus freyer Hand durch einen Zug verbinden.

Hieraus ergiebt sich nun die Construction zur Erfindung der zwey mittlern Proportionalen. Man verlängere CB bis dieselbe die krumme Linie in E schneidet. Durch E und A ziehe man die gerade Linie EAN, welche die verlängerte CD in N trifft: so sind, nach der vorhergehenden Auflösung des Apollonius, BE und ND die beyden mittlern Proportionallinien zwischen AB und AD; weil alsdann vermöge der Construction der krummen Linie ANE allemal GN = GE ist, wie verlangt wurde.

§. 24.

Die Gleichung für diese krumme Linie wird leicht gefunden. Es sey MP auf DAP senkrecht und MLK mit PD parallel; ferner sey AB = DC a, AD = BC = b, AP = x, PM = y.

Da die Dreyecke ALM und FDA ähnliche Dreyecke sind, so hat man:

$$ML : AL = AD : FD, \text{ oder}$$
$$x : y = b : FD, \text{ also ist}$$
$$FD = \frac{by}{x}.$$

Auch ist $MK = ML + LK$, oder $MK = x + \frac{1}{2} b$ und $KG = GI - KI$, oder $KG = \frac{1}{2} a - y$.

Nun ist $MG^2 = MK^2 + KG^2$, folglich $MG^2 = (x + \frac{1}{2} b)^2 + (\frac{1}{2} a - y)^2$.

Ferner ist $FH = DH + FD$, oder $FH = \frac{1}{2} a + \frac{by}{x}$ und $GH = \frac{1}{2} b$.

Nun ist auch $FG^2 = FH^2 + GH^2$, folglich

$$FG^2 = \left(\frac{1}{2} a + \frac{by}{x}\right)^2 + \frac{1}{4} b^2.$$

Nach der Construction ist $FG = GM$, mithin $(x + \frac{1}{2} b)^2 + (\frac{1}{2} a - y)^2 = \left(\frac{1}{2} a + \frac{by}{x}\right)^2 + \frac{1}{4} b^2$, oder

$$x^2 + bx + \frac{1}{4} b^2 + \frac{1}{4} a^2 - ay + y^2 = \frac{\frac{1}{4} a^2 x^2 + abxy + b^2 y^2}{x^2} + \frac{1}{4} b^2,$$

also $x^4 + bx^3 - ayx^2 + y^2 x^2 = abxy + b^2 y^2$.

Hieraus folgt:

$$y^2 = -\left(\frac{abx + ax^2}{b^2 - x^2}\right) y + \frac{bx^3 + x^4}{b^2 - x^2}$$

Da $b^2 - x^2 = (b + x)(b - x)$, so ist

$$y^2 = -\left(\frac{abx + ax^2}{(b+x)(b-x)}\right) y + \frac{bx^3 + x^4}{(b+x)(b-x)},$$ oder

$$y^2 = -\frac{ax}{b-x} y + \frac{x^3}{b-x}.$$

§. 25.

Diese Gleichung ist die nämliche, die in Abschnitt I. §. 1. gefunden worden ist, folglich muß auch diese krumme Linie dieselbe seyn, die Fig. 1. u. Fig. 2. gezeichnet, und (Abschnitt I. §. 13.) mit dem angegebenen Instrumente (Fig. 3.) beschrieben worden ist.

§. 26.

Diese vorhin durch Puncte gezeichnete krumme Linie läßt sich durch stetige Bewegung eines Stiftes auf folgende Art beschreiben.

Es seyn (Fig. 8.) DC und BC die beyden äußern Proportionalen, ABCD das Parallelogramm derselben wie vorhin (Fig. 6 und 7.) HI eine Rinne in der verlängerten Linie DC; FE ein Lineal, das sich um einen Stift, der in A eingeschlagen ist, herumdrehen läßt. An diesem Lineal ist ein Schieber M befindlich, der mit einem Stift b versehen wird, welcher bestimmt ist die krumme Linie AbNO zu beschreiben. An jenem Schieber ist in d ein Faden befestigt, welcher über eine Rolle e geschlagen, und woran ein kleines Gewicht gebunden wird, welches so schwer seyn muß, daß es den Schieber nach e hinziehen kann; und G ist ein Stift, welcher in dem Mittelpunct des Parallelogramms eingeschlagen ist; KL ein zweytes Lineal, welches an dem Stift G anliegt; hieran ist in a ein Stift befestigt, welcher genau in der Rinne HI passen muß; noch ist dieses Lineal mit einem zweyten Stifte c versehen. Die Stifte a, A und B, so wie a, G und c müssen in geraden Linien liegen, und auch von gleicher Dicke seyn. Nun wird an den Stift b ein Faden gebunden, der Schiefer M so gestellt, daß Gb = Ga ist; alsdann wird der Faden um den Stift G geschlagen, straff angezogen, und um den Stift c einige Mal herumgewunden und befestigt.

§. 27.

Mit diesem Instrumente wird die genannte krumme Linie auf folgende Art beschrieben.

Man drehe das Lineal KL so herum, daß es beständig an dem Stift G anliegt, und der Stift a sich in der Rinne von a nach H hinschiebet. Hierdurch bewirkt man, daß sich das Lineal FE um den Stift A drehen muß, und weil der Schieber M, wie vorhin gesagt, durch ein Gewicht nach e hingezogen wird: so muß der Faden bG gespannt bleiben, und der Stift b wird alsdann die krumme Linie bNO beschrieben. Daß diese Linie die vorhin durch Puncte gezeichnete krumme Linie seyn muß, ist leicht einzusehen, weil während dieser Bewegung beständig Ga = Gb bleibt, indem sich der Faden bG eben so viel von Gc abwickelt, und länger wird, als sich das Stück des Lineals aG verlängert.

§. 28.

Will man das Stück der krummen Linie bA und den Knoten AfgA

beschreiben, so drehe man die Lineale nach der entgegengesetzten Seite herum: so wird, während sich der Stift a nach D bewegt, das Stück der Linie bA, und während er von D bis C fortrückt, der Knoten AfgA beschrieben.

---

§. 29.

Philo's von Byzanz Auflösung.

Man setze die beyden äußern Proportionalen CD und CB [Fig. 9.] rechtwinklicht zusammen, und vollende das Parallelogramm ABCD. Nun verlängere man CD und CB nach F und E; ferner wird die Diagonale BD gezogen und in G halbirt; aus G beschreibe man mit dem Halbmesser GA = GB = GD den Halbkreis BAHD. Nun wird an den Punct A ein Lineal EAHF so gelegt, daß AE = HF wird, welches man durch wiederholtes Probiren und Messen der Linien AE und HF bewerkstelligen kann. Wenn dieses geschehen ist, so sind die Linien AB : BE : DF : AD oder DC : BE : DF : BC in stetiger Proportion. (S. Reimer, Historia problematis etc. pag. 117.)

§. 30.

Auf folgende Art lassen sich die gesuchten Proportionalen BE und DF ohne Probiren finden.

Es sey (Fig. 10.) das Parallelogramm ABCD, wie vorhin gezeichnet. Aus G wird mit dem Halbmesser GB der Kreis BAHDC beschrieben. Nun wird durch den Punct A irgend eine gerade Linie MHAE gezogen, welche den Kreis in H und A, die verlängerte Linie CB aber in E schneidet. Nimmt man nun HM = AE, so ist M ein Punct in der krummen Linie ANML. Wird auf diese Art eine beliebige Anzahl Puncte der Linie bestimmt, so kann man diese durch einen Zug aus freyer Hand verbinden.

Um nun hieraus die zwey mittlern Proportionalen zu finden, verlängere man CD so weit bis dieselbe die krumme Linie in L schneidet. Durch L und A wird die gerade Linie LAK gezogen, welche die verlängerte Linie CB in K trifft, alsdann sind die Linien AB : BK : DL : AD oder DC : BK : DL : BC in stetiger Proportion, wie aus der vorhergehenden Auflösung des Philo erhellt; indem nach der Verzeichnung der krummen Linien ANML, allemal OL = AK ist, wie verlangt wurde.

§. 31.

Die Gleichung für diese krumme Linie ist leicht gefunden. Man verlängere BA nach P und ziehe MP auf BAP senkrecht. Es sey AD = a, AB = b, AP = x, PM = y. Da die beyden Dreyeckt ABE und APM einander ähnlich sind, so hat man:

$$AP : PM = AB : BE, \text{ oder}$$

$$x : y = b : BE, \text{ also ist}$$

$$BE = \frac{by}{x}.$$

Da nach der Zeichnung dieser krummen Linie AE = HM ist, so ist auch EH = AM.

Nun ist in dem rechtwinklichten Dreyeck APM,
$AM^2 = AP^2 + PM^2$, oder $AM = EH = \sqrt{[x^2 + y^2]}$.

Ferner hat man die Proportion AP : AM = AB : AE, oder

$$x : \sqrt{[x^2 + y^2]} = b : AE, \text{ also ist}$$

$$AE = \frac{b\sqrt{[x^2 + y^2]}}{x}.$$

Nach geometrischen Gründen hat man EH : EC := EB : AE. [S. Kästners ebene Trigonometrie 16. Satz.]

Setzt man nun die vorhin gefundenen Werthe in diese Proportion, so erhält man:

$$\sqrt{[x^2 + y^2]} : \frac{by}{x} + a = \frac{by}{x} : AE, \text{ also ist}$$

$$AE = \frac{b^2 y^2 + abxy}{x^2 \sqrt{[x^2 + y^2]}}.$$

Vorhin ist $AE = \frac{b\sqrt{[x^2 + y^2]}}{x}$ gefunden. Werden beyde Werthe von AE einander gleich gesetzt, so erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{b\sqrt{[x^2 + y^2]}}{x} = \frac{b^2 y^2 + abxy}{x^2 \sqrt{[x^2+y^2]}}, \text{ oder}$$

$$\frac{bx^2 + by^2}{x} = \frac{b^2y^2 + abxy}{x^2}, \text{ oder } bx^3 + bxy^2 = b^2y^2 + abxy, \text{ oder}$$

$$x^3 + xy^2 = by^2 + axy; \text{ hieraus folgt}$$

$$y^2 = -\frac{ax}{b-x}y + \frac{x^3}{b-x}.$$

§. 32.

Auch diese Gleichung ist die nämliche, welche man in Absch. I. §. 1. und 24. für die daselbst gezeichnete krumme Linie gefunden hat.

Hieraus folgt also, daß auch diese (Fig. 10.) durch Puncte gefundene krumme Linie mit den Linien, die Fig. 1. und Fig. 7. verzeichnet sind, die nämliche seyn muß, und daß sich also eine und dieselbe Linie auf drey verschiedene Arten zeichnen läßt.

§. 33.

Aus dieser Verzeichnung der krummen Linie läßt sich ebenfalls eine Vorrichtung herleiten, dieselbe durch stetige Bewegung eines Stiftes zu beschreiben.

Es seyn (Fig. 11.) DC und BC die beyden äußern Proportionalen, ABCD, wie vorhin, das Parallelogramm derselben; HI eine Rinne, und FE ein Lineal, welches sich um einen Stift, der in A eingeschlagen ist, herumdrehen läßt. An diesem Lineal sind zwey Schieber M und O befindlich. Der erste Schieber ist mit einem Stift a versehen, welcher in die Rinne HI passen muß; der zweyte mit einem Stift c, welcher die krumme Linie cNL beschreiben soll. K ist ein dünnes Blech, welches unter dem Lineal FE durchgeht, und sich um den Stift G herumdrehen läßt. An demselben befindet sich ein aufrecht stehender Stift b, welcher in dem Umfange des Kreises befindlich ist. Nun wird an den Stift a ein Faden befestiget und um die Stifte b, G und die Rolle f geschlagen. Ein zweyter Faden wird an den Stift c gebunden, und gleichfalls um die Stifte A und G, und die Rolle f geschlagen. Nun wird der Schieber O so gestellt, Ac = ab ist. Beyde Fäden werden alsdann angezogen, zusammen vereinigt und mit einem Gewicht Q versehen.

Wird nun das Lineal FE um A nach H gedreht, so dreht sich das Blech K um G und der Stift b bewegt sich von b nach A. Hierdurch wird der vorhin

genannte Faden angezogen und das Gewicht Q in die Höhe gehoben. Während dieser Bewegung wird der Schieber O, wie bey dem vorhin beschriebenen Instrument, nach E hingezogen, und der Stift c beschreibt alsdann die verlangte krumme Linie cNL, wie aus der Einrichtung dieses Instruments, und auch nach dem Vorhergehenden leicht einzusehen ist.

§. 34.

Von diesen drey verschiedenen Werkzeugen, mehrgenannte krumme Linie zu beschreiben, verdienet das Fig. 3. abgebildete den Vorzug, weil es sehr zuverlässig und sicher ist. Hierauf folgt das Fig. 8. vorgestellte. Weniger zuverlässig ist das so eben beschriebene, und Fig. 11. abgebildete Instrument wegen der doppelten Fäden, die dabey angebracht sind. Die Ursache ist, weil sich dieselben beym Gebrauch des Instruments etwas ausdehnen können, welches nothwendig einige Unrichtigkeit veranlassen muß.

---

§. 35.

Sporus Auflösung.

Auf die Schenkel eines rechten Winkels KCD (Fig. 12.) trage man von C aus die beyden äußern Proportionalen CB und CD; mit der größten CD beschreibe man von C aus den Halbkreis DFKGA, verlängere DC bis A und ziehe durch D und B die gerade Linie DBG. Nun wird durch A die gerade Linie AF, welche DG und CK in E und H schneidet, so gelegt, daß EH = HF wird, welches sich bekanntlich durch Versuche bewerkstelligen läßt. Ist dieses geschehen, so ist CH die zweyte mittlere Proportionale zwischen CB und CD, oder zwischen CB und CK, weil CK = CD ist.

Ferner suche man zwischen CB und CH die mittlere Proportionale, welche durch die Elementar-Geometrie gefunden werden kann. Diese sey CM: so sind die vier Linien CB : CM : CH : CK in stetjger Proportion. (Man sehe Reimer p. 201.)

§. 36.

Auf folgende Art kann man des Probirens überhoben seyn.

Es sey in Fig. 13. alles wie in der 12., nur werde die gerade Linie AM nach Gefallen gezogen und $nM = nE$ genommen; alsdann ist M ein Punct der krummen Linie ABMRQ. Auf diese Art kann man eine beliebige Anzahl Puncte jener Linie bestimmen, und diese aus freyer Hand durch einen Zug verbinden. Diese krumme Linie schneide nun den Halbkreis in R, von R ziehe man nach A die gerade RA, welche CK in S schneidet: so ist CS, wie aus dem Vorhergehenden erhellet, die zweyte mittlere Proportionale zwischen CB und CD.

§. 37.

Die Gleichung für diese krumme Linie läßt sich folgender Gestalt leicht finden.

Man ziehe PA auf AD und MP auf AP senkrecht; ferner ziehe man MO und EN mit KC parallel. Es sey $CB = a$, $DC = CA = b$, $AP = x$, $PM = y$. Weil $En = nM$, so ist nach geometrischen Gründen $NC = CO$, folglich $DN = AO = y$.

Auch sind die Dreyecke DCB und DNE einander ähnlich, und man hat:

$$DC : CB = DN : NE, \text{ oder}$$

$$b : a = y : NE, \text{ also ist}$$

$$NE = \frac{ay}{b}.$$

Auch ist $AN = AD - DN$, oder $AN = 2b - y$.

Ferner ist auch das Dreyeck ANE dem Dreyecke APM ähnlich, mithin auch:

$$AN : NE = PM : AP, \text{ oder}$$

$$2b - y : \frac{ay}{b} = y : x, \text{ folglich ist}$$

$$2bx - yx = \frac{ay^2}{b}, \text{ oder } 2b^2x - bxy = ay^2, \text{ also ist}$$

$$y^2 = -\frac{bx}{a}y + \frac{2b^2x}{a}, \text{ folglich}$$

$$y = -\frac{bx}{2a} \pm \surd\left(\frac{b^2 x^2}{4a^2} + \frac{2b^2 x}{a}\right)$$

$$y = -\frac{bx}{2a} \pm \surd\frac{(x^2 + 8ax)\, b^2}{4a^2}$$

$$y = -\frac{bx}{2a} + \frac{b}{2a}\surd(x^2 + 8ax).$$

§. 38.

Aus dieser Gleichung sieht man, daß diese krumme Linie eine Linie der zweyten Ordnung ist; folglich muß dieselbe entweder eine Parabel, Ellipse, oder Hyperbel seyn.

Es sey $x = 0$, so ist auch $y = 0$ und die krumme Linie geht durch A.

Drückt man die Größe unter dem Wurzelzeichen durch eine unendliche Reihe aus, so erhält man:

$$\surd(x^2 + 8ax) = x \pm 4a - \frac{8a^2}{x} + \frac{32a^3}{x^2} \cdot \cdot \cdot \cdot,$$

folglich $y = -\frac{bx}{2a} \pm \frac{b}{2a}\left(x + 4a - \frac{8a^2}{x} + \frac{32a^3}{x^2} \cdot \cdot \cdot \cdot\right)$.

Wird nun $x = \infty$ gesetzt, so ist

$y = -\frac{b\,\infty}{2a} \pm \frac{b\,\infty}{2a} + \frac{4ab}{2a}$, oder 1) $y = -\frac{b}{a}\infty$ und 2) $y = +2b$. Die krumme Linie hat also nach der einen Seite zwey unendliche Schenkel: sie ist also keine Ellipse.

Für $x < -8a$ ist y unmöglich, für $x = -8a$ ist $y = 4b$. Wird $x = -\infty$ gesetzt, so ist $y = +\frac{b}{a}\infty$ und $y = +2b$.

Man sieht also hieraus, daß diese krumme Linie auch zwey unendliche Schenkel nach der andern Seite hat, folglich muß dieselbe eine Hyperbel seyn.

§. 39.

Diese krumme Linie läßt sich durch stetige Bewegung eines Stiftes auf folgende Art beschreiben.

Es seyn (Fig. 14.) CB und CD, wie bey der letzten Figur, die beyden äußern Proportionalen, CA = CD und AZD der vorher genannte Halbkreis. CBK und DBG sind zwey gerade Rinnen; ferner FE und HI zwey rechtwinklicht zusammen verbundene Lineale; M, O und N drey Schieber, die sich an diesen Linealen hin und her schieben lassen. Der erste Schieber ist mit einem Stift a versehen, welcher in die Rinne DG passen muß; der zweyte mit einem Stift c, welcher die krumme Linie BcS beschreiben soll; b ist ein Stift, welcher in der Rinne CK paßt und darin beweglich ist. Q und R sind zwey Bleche, die durch drey Stifte d, e und f mit den eben genannten Schiebern so verbunden sind, daß be = bd, df = ef, und ba = bc ist.

Wird nun der Schieber N nach H hingeschoben, so wird sich der Schieber O nach E, und M nach F bewegen, und es muß beständig bc = ba, oder bd = be bleiben, wie aus der Aehnlichkeit und Gleichheit der beyden Dreyecke dbf und ebf folgt.

Will man dieses Instrument gebrauchen, so wird in A ein Stift eingeschlagen, die Vorrichtung so herumgedrehet, daß sich das Lineal FE beständig an dem Stift A hinschiebet, während sich die Stifte b nach K und A nach G bewegen; alsdann beschreibt der Stift c den Theil der krummen Linie cS, und so ist vermöge der Einrichtung dieses Instruments bc = ab; auch sind die Stifte A, a, b und c in einer geraden Linie befindlich, wie es die Verzeichnung dieser krummen Linie erfordert.

Soll der Theil cB der krummen Linie beschrieben werden, so muß man das Werkzeug auf die entgegengesetzte Seite, wie vorhin angegeben ist, herumdrehen.

IV. Von der Construction der cubischen Gleichungen durch die Ophiuride (Schlangenschwanzlinie).

§. 40.

Mit der Construction der Gleichungen hat man sich im 17ten Jahrhundert

viel beschäftiget. Descartes war der erste, welcher die Algebra auf die Geometrie der krummen Linien anwandte und sich bey der Construction der Gleichungen des Kreises und der Parabel bediente. De Slúse erweiterte diese Methode und zeigte, daß wenn sie auf mancherley Art durch den Kreis und einen der Kegelschnitte u. s. w. construiren und dadurch auflösen könne. Thomas Baker, ein Engländer, lehrte alle cubische und biquadratische Gleichungen, ohne vorgängige Verwandelung, mittelst eines Kreises und einer einzigen angenommenen Parabel zu verzeichnen. Dieses Verfahren ist noch unter dem Namen Bakers Centralregel bekannt. Weil Bakers Vorschriften, wie von den Zeichen + und — bald das eine, bald das andere zu gebrauchen ist, zu große Achtsamkeit erfordern: so suchte Halley durch eine bequemere Verzeichnungsart, jene Unbequemlichkeiten zu vermeiden. Newton wandte die Conchoïde zur Verzeichnung cubischer Gleichungen an, auch zeigte er, wie jeder Kegelschnitt dazu gebraucht werden könne.

Außer jenen Constructionen durch erwähnte krumme Linien, hat man noch die sogenannte arithmetisch-geometrische Construction, wo die Gleichungen durch den Zug krummer Linien abgebildet werden. Diese Abbildung der Gleichungen ist sehr geschickt, die Theorie derselben auf eine sinnliche Art zu erläutern, z. B. die Ursache anzugeben, warum die unmöglichen Wurzeln allemal paarweise vorhanden sind u. s. w.

Nach dieser kurzen Uebersicht der Verfahrungsarten, die Gleichungen durch Construction aufzulösen, weil ich, ohne mich weiter dabey aufzuhalten, meine Auflösung der cubischen Gleichungen durch die Ophiuride mittheilen.

§. 41.

Aufgabe. Es sey folgende Gleichung $x^3 - fx - g = o$, deren zweytes Glied fehlt, zu construiren, und f und g seyn, durch Zahlen angegeben.

Auflösung. Man setze, diese Gleichung soll mit der in Absch. I. §. 1. gefundenen Gleichung $x^3 - (ay - y^2)x - by^2 = o$ einerley seyn: so ist $ay - y^2 = f$, und $by^2 = g$. (Klügels mathematisches Wörterbuch, 1r Theil S. 134.)

Man hat also aus zwey Gleichungen drey unbekannte Größen a, b und y zu bestimmen. Folglich kann man eine von diesen dreyen nach Gefallen anneh-

men. Es wird am bequemsten seyn, y dazu zu wählen, weil man sonst im entgegengesetzten Falle y durch eine quadratische Gleichung bestimmen müßte, welches unbequem seyn würde; folglich hat man $a = \frac{f + y^2}{y}$ und $b = \frac{g}{y^2}$. Der schicklichste Werth von y wird für jeden besondern Fall bestimmt werden müssen.

Es sey folgende Gleichung $x^3 - 13x - 12 = 0$ gegeben, hier ist $a = \frac{13 + y^2}{y}$, $b = \frac{12}{y^2}$, und wird $y = 1$ genommen, so ist $a = 14$ und $b = 12$. Man nehme also (Fig. 2.) AB = 14, BD = 12, und beschreibe nach dem vorhergehenden Verfahren die krumme Linie AOTLAM. Wird nun in dem Abstand An = y = 1 die auf AB senkrechte Linie pnq gezogen, welche die krumme Linie in o, p und q schneidet: so ist nq die positive Wurzel und no und np sind alsdann die beyden negativen Wurzeln dieser Gleichung; jene ist = + 4, diese sind = — 1 und — 3.

§. 42.

1. Exempel. Die Wurzeln der Gleichung $x^3 - 19x + 30 = 0$ nach dem vorhergehenden Verfahren zu finden.

Da $a = \frac{19 + y^2}{y}$ und $b = -\frac{30}{y^2}$, so ist, für $y = 2$, $a = 11\frac{1}{2}$ und $b = -7\frac{1}{2}$. Folglich ist (Fig. 5.) $AL = b = 7\frac{1}{2}$, $AH = a = 11\frac{1}{2}$ und $HM = y = 2$.

Alsdann sind die Linien MO, MP und MN die drey Wurzeln, und zwar jene positiv + 2 und + 3, diese negativ = — 5.

§. 43.

2. Exempel. Es sey die Gleichung $x^3 - 5x + 12 = 0$ gegeben, und man soll, wie vorhin, ihre Wurzeln finden. Hier ist $a = \frac{5 + y^2}{y}$, $b = -\frac{12}{y^2}$, für $y = 2$, ist $a = 4\frac{1}{2}$, $b = -3$.

Man nehme (Fig. 5.) AL = 3, AH = $4\frac{1}{2}$, und beschreibe wie vorhin die krumme Linie. Wird nun Hn = 2 genommen, und pnq auf AH senkrecht gesetzt: so schneidet pq die krumme Linie in p, und np = — 3 ist eine Wurzel dieser Gleichung. Die beyden andern Wurzeln sind unmöglich, weil die krumme Linie von pq nur einmal geschnitten wird.

§. 44.

3. Exempel. Die Wurzeln der Gleichung $x^3 + 5x - 18 = 0$ zu finden. Soll diese Gleichung mit der in Absch. I. §. 1. gefundenen Gleichung $x^3 + [y^2 - ay] x - by^2 = 0$ einerley seyn, so ist $y^2 - ay = 5$, und $by^2 = 18$, also $a = \frac{y^2 - 5}{y}$, $b = \frac{18}{y^2}$ und für $y = 3$, ist $a = 1\frac{1}{3}$ und $b = 2$.

Man nehme also [Fig. 2.] AB = $1\frac{1}{3}$, BD = 2, Am = y = 3, so ist, wenn mN senkrecht auf AB gesetzt wird und selbige die krumme Linie in N schneidet, Nm eine Wurzel der Gleichung und = + 2; die beyden andern Wurzeln sind unmöglich wegen der vorhin angegebenen Ursache.

§. 45.

4. Exempel. Es sey $x^3 - 2c^3 = 0$, alsdann ist $ay - y^2 = 0$, und $by^2 = 2c^3$, also $a = y$ und $b = \frac{2c^3}{y^2}$. Es sey $c = 5$ und $y = a = 5$, so ist $b = 10$. Man nehme also [Fig. 2.] AB = 5 und BD = 10, so ist wenn DB verlängert die krumme Linie in r schneidet, Br eine Wurzel der Gleichung. Ist AB = 5 die Seite eines gegebenen Würfels, so ist Br die Seite eines Würfels, welcher doppelt so groß ist als der gegebene.

Hat eine cubische Gleichung zwey gleiche Wurzeln, so berührt die gerade Linie ST [Fig. 2.] die krumme Linie in T und schneidet dieselbe in S; alsdann sind UT die negativen Wurzeln und US ist die positive Wurzel, auch ist alsdann US = 2UT. Hieraus erhellet, daß wenn y größer als AU wird, die Gleichung nur eine mögliche Wurzel haben kann.

§. 46.

Eine Unbequemlichkeit bey der vorhin gezeigten Construction ist, daß man die Linien AB [Fig. 2.] oder AH [Fig. 5.] bey jedem Verfahren von neuem

wieder eintheilen muß. Dieser Unbequemlichkeit ist man überhoben, wenn man sich eines genauen Maaßstabes bedient, worauf der Zoll in 100 Theilen getheilt ist. Der Gebrauch eines solchen Maaßstabes läßt sich am besten durch folgendes Beyspiel erläutern.

Es sey die Gleichung $x^3 - 151x + 630 = 0$ gegeben, alsdann ist $a = \frac{151 + y^2}{y}$ und $b = -\frac{630}{y^2}$, für $y = 6$ ist $a = 31\frac{1}{6}$ und $b = -17\frac{1}{2}$. Man nehme (Fig. 5.) $AH = a = 31\frac{1}{6} = 12$ Zoll, so ist $AL = -b = -17\frac{1}{2} = -6{,}73$ Zoll und $HM = y = 6 = 2{,}31$ Zoll.

§. 47.

Wird nun nach dem bekannten Verfahren die krumme Linie beschrieben, so sind die Linien MO, MP und MN die Wurzeln der Gleichung. Diese Linien werden alsdann mit einem Zirkel genau abgenommen, und auf dem Maaßstab gemessen.

Gesetzt, man fände $MO = 1{,}92$ Zoll, $MP = 3{,}46$ Zoll und $MN = 5{,}38$ Zoll, so hat man folgende Proportionen:

$$12 : 31\tfrac{1}{6} = 1{,}92 : 5$$
$$12 : 31\tfrac{1}{6} = 3{,}46 : 9$$
$$12 : 31\tfrac{1}{6} = 5{,}38 : 14$$

und die Wurzeln unserer Gleichung sind $MO = +5$, $MP = +9$ und $MN = -14$.

§. 48.

Es ist leicht einzusehen, daß man $AH = a$ so groß annehmen muß, als es nur das Werkzeug (Fig. 3.) erlaubt; denn je größer man jene Linie AH annimmt, um so genauer wird man die Wurzeln finden. Nimmt man an, daß beym Abnehmen der Linien u. s. w. wenn man sich dabey eines Vergrößerungsglases bedienet, nur $\frac{1}{100}$ Zoll gefehlet werden kann: so würde man die Wurzeln unserer Gleichung mit folgender Genauigkeit finden:

$$MO = 5 \pm \tfrac{1}{38} = 5 \pm 0{,}026$$
$$MP = 9 \pm \tfrac{1}{38} = 9 \pm 0{,}026$$
$$MN = -14 \pm \tfrac{1}{38} = -14 \pm 0{,}026$$

§. 49.

Aus dieser bisher gezeigten Construction ergiebt sich folgendes: 1) kann man alle cubische Gleichungen dadurch auflösen, der Coefficient von x und das völlig bekannte Glied mögen ganze Zahlen oder Brüche seyn; 2) giebt diese Construction die Wurzeln, so wohl wenn selbige rational als auch, wenn sie irrational sind, sehr genau an, weil man nur eine einzige krumme Linie braucht, und dieselbe sich sicher und genau beschreiben läßt; 3) ist bey dieser Construction nicht leicht ein Versehen möglich, weil sie einfach ist und die Wurzeln alle in einer geraden Linie liegen, deswegen wird man dieselbe der Construction mit den Kegelschnitten u. s. w. in mehr als einer Hinsicht vorziehen dürfen.

§. 50.

Da durch die Construction einer Gleichung alle Wurzeln derselben auf einmal in ihrer Verbindung anschaulich dargestellet werden, so sind die Constructionen zur Erläuterung der Eigenschaften der Gleichungen sehr zweckmäßig. Auch können dieselben, wie vorhin gezeigt ist, zur Erfindung der Wurzeln und Annäherung in der Rechnung bequem dienen.

Werden die Wurzeln einer Gleichung durch Rechnung gefunden, so erhält man dieselben einzeln ohne Zusammenhang, und man hat deswegen Ursache, die Constructionen vorzuziehen, besonders wenn keine große Genauigkeit verlange wird. Muß man aber die Wurzeln zu irgend einem practischen Gebrauche sehr genau haben, so ist die arithmetische Auflösung unentbehrlich.

V. Von der Dreytheilung eines Winkels durch die Ophiuride (Schlangenschwanzlinie).

§. 51.

Da man durch die gemeine Geometrie einen Winkel halbiren, und auch den rechten Winkel in drey gleiche Theile theilen kann: so konnte es nicht fehlen, daß schon die alten Geometer auf die Theilung eines Winkels in drey gleiche Theile kommen mußten. Diese Aufgabe von der Dreytheilung eines Winkels, läßt sich aber durch den Kreis und gerade Linien nicht auflösen; daher ward dieselbe nicht nur für die Alten, sondern auch überhaupt von Wichtigkeit, indem sie auf höhere krumme Linien führt. Nikomedes erfand die Conchoide, und wandte dieselbe

zur Auflösung jener Aufgabe an. Ebenfalls hat man diese Aufgabe auf mehr als eine Art durch die Hyperbel aufgelöset. Auch in neuern Zeiten ist diese Aufgabe oft vorgenommen worden. Campani gab Vorschriften sie auf neue Art aufzulösen; allein seine Auflösung hatte den Fehler, daß sie schon die Theilung eines Winkels in drey Theile, oder sonst etwas gleichgeltendes voraussetzte. Albrecht Dürer gab ein Verfahren an, durch die gemeine Geometrie diese Aufgabe aufzulösen; allein seine Vorschrift ist nur in einem Fall richtig, in allen andern Fällen findet dabey eine geringere oder größere Abweichung Statt. Eben so ging es Wlochatius, welcher vor kurzem eine elementar-geometrische Auflösung der Aufgabe vom Dreyschnitt des Winkels bekannt gemacht hat, die gleichfalls unrichtig ist. Mein Verfahren diese Aufgabe aufzulösen, ist folgendes:

Um den Winkel BAC (Fig. 5.) in drey gleiche Theile zu theilen, beschreibe man aus A mit dem Halbmesser $AB = 1$ den Bogen BEC. Wird nun der Bogen BE für den dritten Theil des Bogens BC genommen, alsdann EF und CD auf AB senkrecht gezogen: so ist EF der Sinus des gesuchten Winkels BAE, und CD der Sinus des gegebenen Winkels BAC.

Es sey nun $CD = c$, $EF = x$, so ist $c = 3x - 4x^3$ (Klügels analytische Trig. §. 73.) oder $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}c = 0$. Wird diese Gleichung mit der in Abschn. I. §. 1. gefundenen Gleichung $x^3 - (ay - y^2)\,x - by^2 = 0$ verglichen, und soll die dortige Gleichung mit dieser $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}c = 0$, einerley seyn: so ist $ay - y^2 = \frac{3}{4}$ und $-by^2 = \frac{1}{4}c$, folglich ist, $a = \frac{3}{4y} + y$ und $b = -\frac{c}{4y^2}$.

§. 52.

Der vortheilhafteste Werth von y wird wol seyn, wenn y so angenommen wird, daß a und b so viel wie möglich sich gleich werden. Durch einige Proben wird man den schicklichsten Werth für y leicht finden.

Es sey $y = 1$, so ist $a = \frac{7}{4}$ und $b = -\frac{1}{4}c$.
Für $y = \frac{1}{2}$, ist $a = 2$ und $b = -c$.
Wird $y = \frac{1}{4}$ gesetzt, so ist $a = 1\frac{3}{4}$ und $b = -4c$.

Für diese Aufgabe wird es also wol am besten seyn $y = \frac{1}{2}$ anzunehmen, alsdann ist $a = 2$ und $b = -c$. Werden diese Werthe von a, b und y in

die Gleichung $x^3 - (ay - y^2)x - by^2 = 0$ gesetzt, so bekommt man $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}c = 0$, woraus man $EF = x$ auf folgende Art finden kann.

Man verlängere AB bis H und nehme $BH = AB$, so ist $AH = 2AB = a = 2$. In A errichte man auf AH die senkrechte Linie AL und nehme $AL = DC = c$, (AL bekommt hier deswegen eine entgegengesetzte Lage, weil b negativ ist.) Ferner wird BH in M halbiret, so ist $HM = \frac{1}{2} = y$. Endlich wird durch M auf AH die senkrechte Linie PMN gezogen.

Nunmehr werden in H und L Stifte eingeschlagen, und nachdem vorhin gezeigten Verfahren mit der beschriebenen Vorrichtung die Ophiuride NHPOH beschrieben, welche PN in P, O und N schneiden wird, alsdann ist $MO = x$. Wird nun durch den Punct O, OE mit AH parallel gezogen, und schneidet diese den Bogen BC in E, so ist $EF = OM = x$, folglich der Bogen $BE = \frac{1}{3}BC$, also auch der Winkel $BAE = \frac{1}{3}BAC$, mithin die Aufgabe aufgelöset.

§. 53.

Nun muß man noch untersuchen, was es mit den beyden andern Werthen von x, nämlich $x = MP$ und $x = MN$ für eine Beschaffenheit hat. Bedeutet $f = BC$ den kleinsten Bogen, dessen Sinus c ist, und π die halbe Peripherie, so bedeutet x folgende drey Sinus, nämlich von $\frac{1}{3}f$, von $\frac{1}{3}(\pi - f)$ und von $\frac{1}{3}(\pi + f)$, wovon die beyden ersten Werthe positiv, der letzte aber negativ ist (S. Klügels Analyt. Trig. 4. Kap.) Für $f = 60°$ sind also die drey Werthe von x folgende:

1) $x = \sin. 20° = MO = EF = 0{,}342\ldots$
2) $x = \sin. 40° = MP = QR = 0{,}642\ldots$
3) $x = \sin. 80° = MN = TG = 0{,}984\ldots$

Hieraus erhellet, daß der erste Werth von x im Allgemeinen hier nur gebraucht werden kann, und da in diesem Beyspiele $BQ = 40°$ ist: so läßt sich der Punct E auch dadurch bestimmen, wenn der Bogen BQ halbiret wird; alsdann ist $BE = EQ = QC = \frac{1}{3}BC$.

§. 54.

Da der Sinus von $60° = DC = c = 0{,}866\ldots$ ist, so ist $\frac{1}{4}c = 0{,}2165\ldots$ und die gefundenen drey Werthe von x sind die drey Wurzeln der cubischen Gleichung $x^3 - \frac{3}{4}x + 0{,}2165 = 0$.

Zweyter Abschnitt.

Zweyte krumme Linie.

Die Toxoïde (Bogenlinie) und deren Anwendung.

---

§. 1.

Man ziehe (Fig. 15.) HB auf die gerade Linie IA senkrecht, auf dieser werde BA einer gegebenen Linie gleich genommen. Durch A ziehe man nach Gefallen die gerade Linie ADM, welche BH in D schneidet. In D errichte man DP auf AD senkrecht, diese trifft IA in P, von P aus wird die senkrechte Linie PM gezogen, welche die verlängerte Linie AD in M schneidet: so ist M ein Punct in der Toxoïde. Auf diese Art kann man eine beliebige Anzahl Puncte wie E u. s. w. der Linie bestimmen, und diese aus freyer Hand durch einen Zug verbinden.

Um die Gleichung für die Toxoïde zu finden, setze man $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$. Da die Dreyecke ABD, ADP und APM ähnlich und rechtwinklicht sind, wie leicht zu beweisen ist: so hat man

$$AB : AD = AD : AP, \text{ oder}$$

$$a : AD = AD : x, \text{ also ist}$$

$$AD = \sqrt{ax}.$$

Ferner hat man:

$$AD : AP = AP : AM, \text{ oder}$$

$$\sqrt{ax} : x = x : AM, \text{ also ist}$$

$$AM = \frac{x^2}{\sqrt{ax}}.$$

Nun ist in dem rechtwinklichten Dreyecke APM:

$$AM^2 = AP^2 + PM^2, \text{ oder } AM^2 = x^2 + y^2, \text{ also ist}$$

$$AM = \sqrt{(x^2 + y^2)}.$$

Auch ist vorhin $AM = \frac{x^2}{\sqrt{ax}}$ gefunden, folglich ist:

$$\sqrt{[x^2 + y^2]} = \frac{x^2}{\sqrt{ax}}, \text{ oder } x^2 + y^2 = \frac{x^4}{ax} = \frac{x^3}{a} \text{ und}$$

$$y^2 = \frac{x^3}{a} - x^2, \text{ oder } y^2 = \left(\frac{x}{a} - 1\right) x^2, \text{ also}$$

$$y = \pm x \sqrt{\left(\frac{x}{a} - 1\right)}$$

Diese Gleichung läßt sich, nach den Potenzen von x geordnet, auch so ausdrücken: $x^3 - ax^2 - ay^2 = 0$.

§. 2.

Aus dieser Gleichung, und auch aus der Zeichnung der krummen Linie, ergiebt sich: 1) daß diese krumme Linie vom dritten Grade ist; 2) daß dieselbe durch die Axe IB in zwey ähnliche und gleiche Hälften getheilt wird; 3) daß die Scheitel dieser krummen Linie in B ist; 4) daß dieselbe zwey Wendungspuncte N und O, und 5) zwey gleiche Schenkel BNM und BOF hat, die sich bis ins unendliche erstrecken.

§. 3.

Durch diese krumme Linie läßt sich die Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels auf folgende Art leicht und sicher auflösen.

Es sey BA die Seite des gegebenen Würfels, man zeichne nach dem vorhin gewiesenen Verfahren die krumme Linie BNM; aus A beschreibe man mit AK = 2 AB den Bogen KEL, welcher die krumme Linie in E schneidet; durch E und A ziehe man die gerade EA, welche BH in G schneidet: so ist AG die Seite des gesuchten Würfels, welcher doppelt so groß ist als der gegebene. Denn zieht man GC auf AG senkrecht, welche IA in C schneidet, und wird ferner CE gezogen: so sind ABG, AGC, ACE ähnliche Dreyecke und AB : AG = AG : AC = AC : AE, folglich sind die vier Linien AB : AG : AC : AE in stetiger Proportion. Nun ist AB = a und AE = 2 a genommen, demnach sind die beyden äußern Proportionalen gegeben, und die Linien a : AG : AC : 2 a in

stetiger Proportion: folglich ist AG zwischen den Linien a und 2 a die erste mittlere Proportionale, mithin auch die Seite des gesuchten Würfels.

Es wird kaum nöthig seyn zu erinnern, daß wenn $AK = 3\,AB$, oder $= 4\,AB$ u. s. w. genommen wird, daß alsdann AG die Seite eines Würfels ist, welcher dreymal, viermal ꝛc., so groß ist, als der gegebene.

§. 4.

Aufgabe. Es sey folgende Gleichung $x^3 - gx^2 - h = 0$, deren drittes Glied fehlt, zu construiren, und g und h seyn durch Zahlen gegeben.

Auflösung. Man setze, diese Gleichung solle mit der in §. 1. gefundenen Gleichung $x^3 - ax^2 - ay^2 = 0$ einerley seyn, so ist $a = g$ und $ay^2 = h$, folglich $y = \sqrt{\frac{h}{a}}$. Man nehme also (Fig. 15.) $AB = a$ und zeichne nach dem vorhergehenden Verfahren die krumme Linie BENM. Wird nun in dem Abstand $PM = y = \sqrt{\frac{h}{a}}$, QR mit IA parallel gezogen, und schneidet diese die krumme Linie in M: so ist, wenn MP auf IA senkrecht gezogen wird, $PM = x$ die mögliche Wurzel der Gleichung $x^3 - gx^2 - h = 0$, die beyden andern Wurzeln sind unmöglich.

Z. B. für $x^3 - 2x^2 - 32 = 0$, ist $a = AB = 2$ und $y = PM = \sqrt{\frac{32}{2}} = 4$; und man findet alsdann $x = AP = 4$.

Wird nun die Gleichung $x^3 - 2x^2 - 32 = 0$ durch $x - 4 = 0$ dividirt, so bekommt man folgende quadratische Gleichung $x^2 + 2x + 8 = 0$, deren unmögliche Wurzeln sind: 1) $x = -1 + \sqrt{-7}$; 2) $x = -1 - \sqrt{-7}$.

Die Wurzeln der Gleichung $x^3 - gx^2 - h = 0$ lassen sich auch nach Absch. I. §. 41. durch die Ophiuride finden; allein dann müßte man diese Gleichung erst in eine andere verwandeln, worin alle Potenzen von x befindlich wären, alsdann daraus das zweyte Glied wegschaffen, um die Ophiuride darauf anwenden zu können. Da aber dieses beschwerlich seyn würde, so verdient die vorhin gezeigte Construction durch die Toxoïde den Vorzug.

§. 5.

Die Toxoïde läßt sich auch durch stetige Bewegung eines Stiftes beschreiben. Es seyn [Fig. 16.] IA und HB zwey senkrecht auf einander stehende Rinnen, AC und DK zwey rechtwinklicht zusammen verbundene Lineale, b ein Stift, welcher an dem Lineal AC befestiget ist, und in der Rinne HB paßt, F ein Schieber, welcher sich an dem Lineal AC hin und her schieben läßt, und mit einem Stift c versehen ist, um damit die krumme Linie BEc beschreiben zu können. NPG ist ein Winkelhaken, woran der eine Schenkel PG von dünnem Bleche ist, und unter das Lineal AC durchgeht; der andere Schenkel kann von beliebiger Dicke seyn, und ist mit zwey Stiften a und d versehen, welche in der Rinne IA passen müssen. Noch wird in A ein Stift eingeschlagen, so daß BA einer gegebenen Linie gleich ist.

Dieses Instrument wird auf folgende Art gebraucht. Man drehe das Lineal AC um den Stift A so herum, daß es beständig an demselben anliegt, indem sich der Stift b in der Rinne BH, von b nach B, oder von b nach H bewegt. Während dieser Bewegung muß sich der Stift a an dem Rande des Lineals DK hinschieben; geschieht dieses: so beschreibt der Stift c an dem Durchschnitt der Ränder der Lineale PG und AC die Toxoïde, wie aus dieser Vorrichtung und auch aus dem Vorhergehenden hinlänglich erhellet.

Dritter Abschnitt.

Dritte krumme Linie.

Die Kukumaïde (Querkolbenlinie) und deren Anwendung.

---

§. 1.

Es sey (Fig. 21.) DU eine gerade Linie, A ein gegebener Punct außer derselben, und von diesem aus werde AB auf jene senkrecht gezogen. Durch A

ziehe man nach Gefallen die gerade Linie DAM, welche DU in D schneidet; wird nun aus B mit dem Halbmesser BD ein Bogen beschrieben, und schneidet dieser DAM in M: so ist M ein Punct der Kukumaïde NMABIAO. Auf diese Art kann man eine beliebige Anzahl Puncte der Linie bestimmen, und diese aus freyer Hand durch einen Zug verbinden.

Um die Gleichung für diese Linie zu finden, verlängere man BA nach R, und ziehe MP auf BR senkrecht, und nenne $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$: so ergeben sich vermöge der ähnlichen Dreyecke ABD und APM folgende Verhältnisse:

$$AP : PM = AB : BD, \text{ oder}$$

$$x : y = a : BD, \text{ also ist}$$

$$BD = \frac{ay}{x}, \text{ folglich } BD^2 = \frac{a^2 y^2}{x^2}. \text{ Auch ist}$$

$$BM^2 = BP^2 + PM^2, \text{ oder } BM^2 = (a+x)^2 + y^2 = BD^2$$

weil $BM = BD$ angenommen ist. Folglich ist $\frac{a^2y^2}{x^2} = (a+x)^2 + y^2$,

$$\text{mithin } a^2y^2 = (a+x)^2 x^2 + y^2 x^2, \text{ folglich}$$

$$y^2 = \frac{(a+x)^2 x^2}{a^2 - x^2}, \text{ oder}$$

$$y^2 = \frac{(a+x)^2 \; x^2}{(a+x)(a-x)}, \text{ oder}$$

$$y^2 = \frac{a+x}{a-x} x^2, \text{ folglich}$$

$$y = \pm x \sqrt{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $x = 0$, so ist auch $y = 0$; die krumme Linie geht also durch A. Für $x = +a = AR$ ist $y = \pm a \sqrt{\frac{2a}{0}} = \pm \infty$, für $x = -\frac{1}{2}a$, ist $y = \pm 0{,}288 \ldots a$, und endlich für $x = -a$, ist

H

$y = \pm a \sqrt{\frac{0}{2a}} = 0$; die krumme Linie geht also durch B.

Aus diesen Betrachtungen, aus der Gleichung dieser krummen Linie, und aus der Zeichnung derselben ergiebt sich: 1) daß diese krumme Linie vom dritten Grade ist; 2) daß dieselbe durch die Axe BR in zwey ähnliche und gleiche Hälften getheilt wird; 3) daß, wenn die Linie QRS in der Entfernung BR = 2 AB mit DU parallel gezogen wird, selbige die Asymptote für die beyden unendlichen Schenkel AMN und AO ist; 4) daß diese krumme Linie ein Knoten ACIBA hat.

§. 2.

Satz. Wird durch A, GAH mit DU parallel gezogen, und schneidet jene BM in F, so ist AF = FM.

Beweis. Da GH mit DH parallel gezogen ist, so ist MAF = MDB und AFM = DBM, folglich sind die Dreyecke MAF und MDB einander ähnlich, und man hat folgende Proportion:

AF : FM = DB : BM. Nun ist DB = BM angenommen worden, folglich ist AF = FM.

Hieraus ergiebt sich folgende Verzeichnung der Kukumaïde. Man ziehe durch B, BFM nach Gefallen und nehme FM = FA, so ist M ein Punct in derselben. Wird FC = FA genommen, so ist C ein Punct des Knotens ACIBA. Diese Entdeckung ist mir von einem sachkundigen Manne mitgetheilt worden. Es läßt sich hieraus ebenfalls die Gleichung für diese krumme Linie herleiten.

§. 3.

1. Aufgabe. Es berührt die mit BR (Fig. 21.) parallel gezogene Linie LI den Knoten in I und schneidet GH in L; es sollen nun die Linien LI und AL gefunden werden.

Auflösung. Man ziehe IK auf BR senkrecht, so ist die Ordinate $KI = x \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ ein Maximum; folglich muß $d\left(x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)$ $= d\left(\sqrt{\frac{ax^2+x^3}{a-x}}\right) = 0$ seyn.

Es sey $\frac{ax^2 + x^3}{a - x} = Z$, nun ist bekanntlich $d(\sqrt{Z}) = \frac{dZ}{2\sqrt{Z}}$,

folglich $\frac{d\left(\frac{ax^2 + x^3}{a - x}\right)}{2\sqrt{\frac{ax^2 + x^3}{a - x}}} = 0$, also ist $d\left(\frac{ax^2 + x^3}{a - x}\right) = 0$, folglich

$[a - x]\,[2\,ax + 3\,x^2]\,dx - [ax^2 + x^3] \times - dx = 0$, oder

$2\,a^2\,x + ax^2 - 3\,x^3 + ax^2 + x^3 = 0$, oder

$2\,a^2 + 2\,ax - 2\,x^2 = 0$, also

$x^2 = ax + a^2$, folglich $x = \frac{1}{2}\,a \pm \sqrt{\frac{5}{4}\,a^2}$, oder

$x = \frac{1}{2}\,a \pm \frac{1}{2}\,a\sqrt{5}$, oder

1) $x = -0{,}618\ldots\ldots a = AK$, oder

2) $x = +\,1{,}618\ldots\ldots a$.

Für den ersten Werth von x erhält man:

$y = \pm 0{,}618\ldots\ldots a\sqrt{\frac{0{,}382\ldots a}{1{,}618\ldots a}}$, oder

$x = \pm 0{,}618\ldots a\sqrt{0{,}2361}$, oder

$y = \pm 0{,}618\ldots\ldots a, \times 0{,}485$

$y = \pm 0{,}2997\ldots a = KI$.

Für den zweyten Werth von x ist y unmöglich, welcher also hier nicht zu gebrauchen ist.

2. Aufgabe. Zwey gerade Linien AB und BC, [Fig. 22.] nebst den Winkel ABD sind gegeben; man soll daraus ein Dreyeck ABC verzeichnen, worin BD = DC ist.

Auflösung. Mit der gegebenen Linie AB, und dem gegebenen Winkel ABD, zeichne man die Kukumaïde BEC. Aus B beschreibe man alsdann mit BC den Bogen FG, welcher die krumme Linie in C schneidet, und von dem

Durchschnittspunct C ziehe man nach A die gerade CA: so ist ABC das verlangte Dreyeck, weil vermöge der Eigenschaft der Kukumaïde in allen Fällen BD = DC ist.

3. Aufgabe. Den Winkel DBC [Fig. 22.] durch Rechnung zu finden.

Auflösung. Es sey AB = a, BC = b, ABD = B, DBC = Z. Da das Dreyeck BDC gleichschenklicht ist, so ist auch BCD = Z, ADB = 2 Z, BDC = 2 R — 2 Z und BAD = 2 R — B — 2 Z. Es sey 2 R — B = C, so ist BAD = C — 2 Z.

Man hat also im Dreyecke BDC:

$$\sin. BDC : BC = \sin. BCD : BD, \text{ oder}$$

$$\sin. 2Z : b = \sin. Z : BD, \text{ also ist}$$

$$BD = \frac{b \sin. Z}{\sin. 2Z}.$$

Ferner hat man im Dreyecke ABD:

$$\sin. ADB : AB = \sin. BAD : BD, \text{ oder}$$

$$\sin. 2Z : a = \sin. [C - 2Z] : BD, \text{ also ist}$$

$$BD = \frac{a \sin. [C - 2Z]}{\sin. 2Z}.$$

Werden diese beyden Werthe von BD einander gleichgesetzt, so bekommt man folgende Gleichung:

$$\frac{b \sin. Z}{\sin. 2Z} = \frac{a \sin. [C - 2Z]}{\sin. 2Z}, \text{ oder}$$

$$b \sin. Z = a \sin. [C - 2Z].$$

Nun ist $\sin. [C - 2Z] = \sin. C \cos. 2Z - \sin. 2Z \cos. C$, folglich A) $b \sin. Z = a \sin. C. \cos. 2Z - a \sin. 2Z. \cos. C.$

Auch ist: $\sin. 2Z = 2 \sin. Z. \cos. Z$ und
$\cos. 2Z = \cos. Z^2 - \sin. Z^2$, ferner
$\cos. Z^2 = 1 - \sin. Z^2$, also $\cos. Z = \sqrt{[1 - \sin. Z^2]}$.

Werden diese verschiedene Werthe in die Gleichung A gesetzt, so erhält man nach gehöriger Rechnung:

$$b \sin. Z = a \sin. C. [1 - 2\sin. Z^2] - 2a\sin. Z. \sqrt{[1 - \sin. Z^2]}. \cos. C.$$

Zur Abkürzung sey $\sin. C = d$, $\cos. C = c$, $\sin. Z = x$, folglich ist

$$bx = ad [1 - 2x^2] - 2acx \sqrt{[1 - x^2]}, \text{ oder}$$

$$\frac{ad - bx - 2adx^2}{2acx} = \sqrt{[1 - x^2]}.$$

Hieraus erhält man:

$$[4a^2 d^2 + 4a^2 c^2] x^4 + 4abdx^3 + [b^2 - 4a^2 d^2 - 4a^2 c^2] x^2 - 2abdx + a^2 d^2 = 0.$$

Die weitere Auflösung dieser Aufgabe würde sehr beschwerlich seyn, weil man eine vollständige biquadratische Gleichung auflösen müßte; und es ist die vorhin gegebene geometrische Auflösung, besonders wenn keine große Genauigkeit verlangt wird, dieser vorzuziehen.

§. 4.

Die Kukumaïde läßt sich durch stetige Bewegung eines Stiftes auf folgende Art beschreiben.

Es sey DC [Fig. 23.] eine Rinne, welche mit der gegebenen Linie AB einen rechten Winkel macht; in den Endpuncten derselben werden zwey Stifte A und B eingeschlagen. GH und EF sind zwey Lineale, wovon das erste an dem einen Ende mit einem Stift c, an dem andern mit einem Stift a versehen ist, welche beyde nach unten gehn und in der Rinne DC genau passen müssen; an dem zweyten ist ein Stift b befestigt, um damit die Kukumaïde zu beschreiben.

Beym Gebrauch dieser Vorrichtung wird an den Stift b ein Faden gebunden; das Lineal EF an die Stifte a und A gedruckt, und so gestellt, daß Ba = Bb ist; alsdann wird der vorhin genannte Faden um den Stift B geschlagen, straff angezogen und an den Stift c befestiget. Wird nun das Lineal GH nach D geschoben, und während dieser Bewegung das Lineal EF an den Stiften a und A so hingezogen, daß der Faden bB beständig gespannt bleibt: so beschreibt der Stift b die Kukumaïde bTAN; denn vermöge der Einrichtung dieses In-

struments, wird der Faden bB um eben so viel abgewickelt und länger, als sich das Stück des Lineals aB verlängert: folglich ist beständig aB = bB, wie verlangt wurde.

Vierter Abschnitt.

Vierte krumme Linie.

Die Krommyoïde (Zwiebellinie) und deren Anwendung.

---

§. 1.

Es sey (Fig. 24.) AB eine gerade Linie von gegebener Länge. Durch A ziehe man nach Gefallen die Linie AM, und durch B die gerade BC, so daß BCA einem gegebenen Winkel gleich wird. Von C aus nehme man CM von gegebener Länge, so ist M ein Punct in der Krommyoïde MNAQR.

Um die Gleichung für diese krumme Linie zu finden, ziehe man MP auf AB und BE auf AC senkrecht. Es sey AB = a, CM = b, ACB = C, AP = x, PM = y.

Da das Dreyeck APM rechtwinklicht ist, so hat man:

$$AM^2 = AP^2 + PM^2, \text{ oder } AM^2 = x^2 + y^2, \text{ also ist}$$

$$AM = \surd (x^2 + y^2).$$

Ferner geben die ähnlichen Dreyecke APM und AEB:

$$AM : AP = AB : AE, \text{ oder}$$

$$\surd (x^2 + y^2) : x = a : AE, \text{ also ist}$$

$$AE = \frac{ax}{\surd (x^2 + y^2)}.$$

Da $EC = AM - AE - CM$, so ist

$$EC = \sqrt{(x^2 + y^2)} - \frac{ax}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} - b, \text{ oder}$$

$$EC = \frac{x^2 + y^2 - ax - b\sqrt{(x^2 + y^2)}}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}.$$

Ferner hat man:

$$AM : PM = AB : BE, \text{ oder}$$

$$\sqrt{[x^2 + y^2]} : y = a : BE, \text{ mithin}$$

$$BE = \frac{ay}{\sqrt{[x^2 + y^2]}}.$$

Aus dem rechtwinklichten Dreyecke BEC ergiebt sich:

$$EC : BE = 1 : \text{tang. } C, \text{ oder}$$

$$\frac{x^2 + y^2 - ax - b\sqrt{[x^2 + y^2]}}{\sqrt{[x^2 + y^2]}} : \frac{ay}{\sqrt{[x^2 + y^2]}} = 1 : \text{tang. } C, \text{oder}$$

$$x^2 + y^2 - ax - b\sqrt{[x^2 + y^2]} : ay = 1 : \text{tang. } C, \text{ also}$$

$$\frac{a}{\text{tang. } C.} y = x^2 + y^2 - ax - b\sqrt{[x^2 + y^2]}.$$

Zur Abkürzung sey $\frac{a}{\text{tang. } C.} = m$, so ist

$$my = x^2 + y^2 - ax - b\sqrt{[x^2 + y^2]} \text{ also}$$

$$b\sqrt{[x^2 + y^2]} = x^2 + y^2 - ax - my, \text{ oder}$$

$b^2 x^2 + b^2 y^2 = [x^2 + y^2 - ax - my]^2$, diese Gleichung gehörig reducirt, ist

$$\text{A) } y^4 - 2my^3 + [2x^2 - b^2 - 2ax + m^2]\, y^2$$
$$+ [2amx - 2mx^2]\, y + x^4 - 2ax^3 + a^2 x^2 - b^2 x^2 = 0.$$

Die Polar-Gleichung für diese krumme Linie ist leicht gefunden. Es sey [Fig. 24.] wie vorhin $AB = a$, $CM = b$, $ACB = C$, $AM = y$, $BAM = Z$.

Nun giebt das Dreyeck BAC:

$\sin. ACB : AB = \sin. BAC : BC$, oder

$\sin. C : a = \sin. Z : BC$, also

$$BC = \frac{a \sin. Z}{\sin. C}.$$

Auch aus dem rechtwinklichten Dreyeck BEA ergiebt sich:

$1 : \cos. BAE = AB : AE$, oder

$1 : \cos Z = a : AE$, mithin

$$AE = a \cos. Z.$$

Ferner hat man im rechtwinklichten Dreyeck BEC:

$1 : \cos. C = BC : EC$, oder

$1 : \cos. C = \frac{a \sin. Z}{\sin. C} : EC$, also ist

$$EC = \frac{a \sin. Z \cos. C}{\sin. C}.$$

Da $\frac{\cos. C}{\sin. C} = \cot. C$, so ist $EC = a \sin. Z. \cot. C.$

Auch ist $AM = CM + EC + AE$, mithin B) $y = b + a \cot. C. \sin. Z + a \cos. Z$, die verlangte Polar-Gleichung.

Man setze (Fig. 24.) $ACB = C = R$, so ist $\tang. C = \infty$ und $\frac{a}{\tang. C} = m = \frac{a}{\infty} = 0$, folglich fallen aus der vorhin gefundenen Gleichung A alle Glieder weg, worin m befindlich ist, und diese Gleichuug verändert sich alsdann in folgende:

C) $y^4 - [b^2 + 2ax - 2x^2] y^2 - 2ax^3 + x^4 + a^2x^2 - b^2x^2 = 0.$

Wird in dieser Gleichung $b = a$ gesetzt, so kommt:

D) $y^4 - [a^2 + 2ax - 2x^2] y^2 - 2ax^3 + x^4 = 0$, welches die Gleichung für die Cardioïde ist. [Klügels mathematisches Wörterbuch. 1. Theil. S. 936.]

Hieraus erhellt, daß die Krommyoïde durch jene Veränderung der beständigen Größen zur Cardioïde wird.

Setzt man in der vorhin gefundenen Polar-Gleichung B, ACB = C = R, so ist cot. C = o, und aus jener Gleichung wird: E) y = b + a cos. Z, welches die Gleichung für eine Conchoïde mit einer circulären Basis ist. [S. Klügels mathematisches Wörterbuch. I. Th. S. 541.]

Zu dieser Conchoïde gehört ebenfalls die vorhin gefundene Gleichung C, wie leicht einzusehen ist.

§. 2.

Aufgabe. Aus der gegebenen Linie AB (Fig. 25.), und den gegebenen Winkeln ABM und ACB, ein Dreyeck ABM zu zeichnen, worin CM einer gegebeuen Linie gleich ist.

Auflösung. Aus den gegebenen Linien AB, CM und dem Winkel ACB, zeichne man das Stück der Krommyoïde ADME; nun mache man ABM dem gegebenen Winkel gleich, und es schneidet alsdann der Schenkel BM die krumme Linie in M; durch M und A ziehe man die gerade AM: so ist ABM das verlangte Dreyeck, weil vermöge der Eigenschaft der Krommyoïde, CM der gegebenen Linie, und ACB dem gegebenen Winkel jederzeit gleich ist.

So leicht sich diese Aufgabe geometrisch auflösen läßt, so beschwerlich ist dagegen die arithmetische, wie aus folgendem erhellt.

Es sey (Fig. 25.) im Dreyeck ABM, AB = a, CM = b, ACB = C, ABM = B, CBM = X.

Da BMC = ACB — CBM, so ist BMC = C — X, auch ist CBA = B — X, und BAC = 2 R — C — B + X.

Man setze 2 R — C — B = E, so ist BAC = E + X.

Nun hat man im Dreyecke BCM:

sin. CBM : CM = sin. BMC : BC, oder

sin. X : b = sin. [C — X] : BC, also

$$BC = \frac{b \sin. [C - X]}{\sin. X}.$$

Ferner hat man im Dreyecke ABC:

$\sin. ACB : AB = \sin. BAC : BC$, oder

$\sin. C : a = \sin. [E+X] : BC$, mithin

$$BC = \frac{a \sin. [E+X]}{\sin. C}.$$

Werden beyde Werthe von BC einander gleich gesetzt, so erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{b \sin. (C-X)}{\sin. X} = \frac{a \sin. (E+X)}{\sin. C}.$$

Nun ist $\sin. (C-X) = \sin. C. \cos. X - \sin. X. \cos. C$, und

$\sin. (E+X) = \sin. E. \cos. X + \sin. X. \cos. E.$

Auch ist $\cos. X = \sqrt{[1 - \sin. X^2]}$, folglich

$$\frac{b \sin. C. \sqrt{[1 - \sin. X^2]}}{\sin. X} - b \cos. C. =$$

$$\frac{a \sin. E}{\sin. C} \sqrt{[1 - \sin. X^2]} + \frac{a \cos. E}{\sin. C} \cdot \sin. X.$$

Zur Abkürzung sey $b \sin. C = m$,

$b \cos. C = n$, $\frac{a \sin. E}{\sin. C} = p$, $\frac{a \cos. E}{\sin. C} = q$, $\sin. X = z$, so ist.

$$\frac{m \sqrt{[1-z^2]}}{z} - n = p \sqrt{[1-z^2]} + qz, \text{ oder}$$

$$m \sqrt{[1-z^2]} - nz = pz \sqrt{[1-z^2]} + qz^2, \text{ oder}$$

$$[m - pz]. \sqrt{[1-z^2]} = qz^2 + nz, \text{ mithin}$$

$$\sqrt{[1-z^2]} = \frac{qz^2 + nz}{m - pz}, \text{ also}$$

$$1 - z^2 = \frac{q^2 z^4 + 2nqz^3 + n^2 z^2}{m^2 - 2mpz + p^2 z^2}.$$

Hieraus folgt

$[p^2 + q^2] z^4 + [2nq - 2mp] z^3 + [n^2 + m^2 - p^2] z^2 + 2mpz - m^2 = 0.$

§. 3.

Die Krommyoïde läßt sich durch stetige Bewegung eines Stiftes auf folgende Art beschreiben.

Es seyn [Fig. 26.] AD und BE zwey zusammen verbundene Lineale; auf der einen Seite derselben sind der Länge nach Rinnen befindlich, die sich in dem Punct C schneiden, wie aus der Zeichnung zu ersehen ist. In dem einen Lineal ist ein Stift M eingeschlagen, welcher bestimmt ist, die krumme Linie zu beschreiben.

Beym Gebrauch dieses Instruments wird ein Reißbrett mit feinem dichten Papier überzogen, und alsdann werden zwey Stifte A und B in einer gegebenen Entfernung darein geschlagen, welche genau in die vorhin erwähnten Rinnen passen müssen; auch werden die Lineale so gestellt, daß ACB ein gegebener Winkel ist, und CM einer gegebenen Linie gleich sey. Nun drehe man das Werkzeug so herum, daß sich der Stift M nach N bewegt, während dieser Bewegung schiebt sich das Lineal BE auf dem Stift B nach C und E in der Rinne fort; das andere Lineal bewegt sich auf dem Stift A von A nach C und D: alsdann beschreibt der Stift M die Krommyoïde MNAQRAM, wie sich aus dem Verfahren, diese Linie durch Puncte zu zeichnen, ergiebt.

Fünfter Abschnitt.

Fünfte krumme Linie.

Die Didaktyloïde (Zweyfingerlinie) und deren Anwendung.

---

§. 1.

Es sey FG (Fig. 27.) eine gerade Linie, und A ein gegebener Punct ausser derselben; von A aus werde APB auf diese senkrecht gezogen. Durch A ziehe

man nach Gefallen die gerade Linie AC, welche FG in C schneide; wird nun AM = BC genommen, so ist M ein Punct in der Didaktyloïde AMN. Auf diese Art kann man eine beliebige Anzahl Puncte der Linie bestimmen, und diese aus freyer Hand durch einen Zug verbinden.

Die Gleichung für diese Linie ist leicht gefunden. Man ziehe MP auf AB und MD auf FG senkrecht. Ferner sey AB = a, AP = x, PM = BD = y, und da die Dreyecke APM und MDC einander ähnlich sind, so hat man:

$$AP : PM = MD : DC, \text{ oder}$$

$$x : y = a - x : DC, \text{ also ist}$$

$$DC = \frac{ay - xy}{x}.$$

$$\text{Da } AM = BC = BD + DC, \text{ so ist}$$

$$AM = y + \frac{ay - xy}{x}, \text{ oder } AM = \frac{ay}{x}.$$

Ferner hat man in dem rechtwinklichten Dreyecke APM:

$$AP^2 + PM^2 = AM^2, \text{ oder}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 y^2}{x^2}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$y^2 = \frac{x^4}{a^2 - x^2}, \text{ folglich}$$

$$y = \pm \frac{x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

§. 2.

Setzt man in dieser Gleichung $x = 0$, so ist auch $y = 0$; die krumme Linie geht also durch A. Für $x = \pm a$ ist $y = \pm \frac{x^2}{0} = \infty$; wird $x >$ als a genommen, so ist y unmöglich.

Es sey (Fig. 28.) FG eine gerade Linie, CAB wie vorhin auf diese senkrecht; ferner sey AC = AB = a und HCI mit FBG parallel; alsdann ergiebt sich aus der Construction der Didaktyloïde, und auch aus der Gleichung derselben: 1) daß diese krumme Linie vom vierten Grade ist; 2) daß dieselbe durch den Anfangspunct A der Abscissen geht, und 3) von der Axe CB in zwey ähnliche und gleiche Hälften getheilt wird; 4) daß dieselbe vier unendliche Schenkel AMO, Afo, ANQ und Ahp hat, welche sich den geraden Linien FBG und HCI immer mehr und mehr nähern, aber solche nie erreichen, diese gerade Linien sind daher ihre Asymptoten.

§. 3.

Die Didaktyloïde läßt sich noch auf folgende Art durch Puncte verzeichnen. Es sey (Fig. 29.) AB = a; über den Durchmesser AB beschreibe man den Halbkreis ACB und ziehe durch B nach Gefallen BC; aus A beschreibe man mit AC den Bogen CP, welcher AB in P schneidet; in P errichte man die senkrechte Linie PM. Ferner wird durch A, AF mit CB parallel gezogen, welche PM in M schneidet, alsdann ist M ein Punct in der Didaktyloïde. Denn werden CA und BE auf AF, ferner BF auf AB senkrecht gezogen: so sind die Dreyecke APM und BEF einander ähnlich und gleich, wie leicht zu beweisen ist: folglich ist BF = AM, wie verlangt wurde.

§. 4.

1. Aufgabe. APM (Fig. 28.) zu quadriren.

Auflösung. Es heiße die Fläche APM = Z, AB = a, AP = x, PM = y. Nun ist nach den Regeln der Differential-Rechnung dZ = ydx, folglich $dZ = \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, also $Z = \int y dx = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$.

Ferner ist:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = C. + \tfrac{1}{2}\, a^2 \text{ Arc. tang.} \sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2 - x^2}\right)} - \tfrac{1}{2}\, x \sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Da für x = 0 auch Z = 0 ist, so ist 0 = Const. + 0, folglich Const. = 0 und

$$Z = \tfrac{1}{2} a^2 \text{ Arc. tang. } \sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2 - x^2}\right)} - \tfrac{1}{2} x \sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Für $x = a$, ist $Z = \frac{1}{2} a^2 . \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{4} \pi a^2$ = dem ganzen sich ins Unendliche erstreckendem Raume, zwischen der Axe AB, der Asymptote BG und dem unendlichen Schenkel AMO = der Fläche des Kreises AfBA, dessen Fläche gleichfalls $= \frac{1}{4} \pi a^2$ ist. π bedeutet den Umfang eines Kreises für den Durchmesser $= 1$.

2. **Aufgabe.** An M (Fig. 27.) die Tangente GT zu ziehen.

Auflösung. Die Tangente GT schneide die Axe AB in T, so ist PT die Subtangente, und nach den Regeln der Differential-Rechnung ist $PT = \frac{ydx}{dy}$. Da $y^2 \frac{x^4}{a^2 - x^2}$, so ist

$$2\, ydy = \frac{[(a^2 - x^2)\, 4x^3 + 2x^5]\, dx}{[a^2 - x^2]^2}, \text{ folglich}$$

$$\frac{1}{2\, y\, dy} = \frac{[a^2 - x^2]^2}{[(a^2 - x^2)\, 4x^3 + 2\, x^5]\, dx}.$$

Wird diese Gleichung auf beyden Seiten des Gleichheitszeichens mit $2\, y^2 = \frac{2\, x^4}{a^2 - x^2}$ multiplicirt, so kommt

$$\frac{2\, y^2}{2\, y\, dy} = \left(\frac{2\, x^4}{a^2 - x^2}\right) \left(\frac{(a^2 - x^2)^2}{[(a^2 - x^2) 4x^3 + 2\, x^5]\, dx}\right), \text{ folglich}$$

$$\frac{y}{dy} = \frac{2x^4\, (a^2 - x^2)}{[(a^2 - x^2)\, 4x^3 + 2x^5]\, dx}.$$

Hieraus erhält man nach gehöriger Rechnung

$$PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{2\, a^2 x - 2\, x^3}{4\, a^2 - 2x^2}.$$

Da $AT = AP - PT$, so ist

$$AT = x - \frac{2\, a^2 x - 2\, x^3}{4a^2 - 2\, x^2}, \text{ oder}$$

$$AT = \frac{a^2 x}{2a^2 - x^2}.$$

Hieraus ersieht man, daß für $x = o$, $AT = \frac{o}{2a^2} = o$, und daß alsdann die Tangente MT in die Axe AB fällt. Für $x = AB = a$, ist $AT = \frac{a^3}{a^2} = a = AB$, und die Tangente fällt in die Asymptote BG.

3. Aufgabe. In dem rechtwinklichten Dreyecke ABC (Fig. 30.) ist BM auf AC senkrecht, AM = BC und AB = a, wie vorhin gegeben; man soll das Dreyeck ABC construiren.

Auflösung. Man halbire AB in D und beschreibe mit DA = DB den Halbkreis BMA: so liegt der Punct M in demselben, weil alsdann AMB ein rechter Winkel ist. Ferner zeichne man nach dem vorhergehenden Verfahren die Didaktyloïde AMO, welche den Halbkreis in M schneidet; durch A und M ziehe man die gerade Linie AMC, welche BC in C schneidet: so ist ABC das verlangte Dreyeck, weil alsdann vermöge der Eigenschaft der Didaktyloïde auch BC = AM ist, wie verlangt wurde.

In dieser Aufgabe sind die Winkel ABC und AMB als rechte Winkel angenommen worden. Dieses ist aber nicht nothwendig, sondern man kann dieselben von beliebiger Größe nehmen, nur muß alsdann AMB ein Kreisabschnitt seyn, und so genommen werden, daß derselbe den gegebenen Winkel AMB faßt. [Euklids Elemente 3. Buch. 33. Satz.].

4. Aufgabe. BC = AM [Fig. 30.] durch Rechnung zu finden.

Auflösung. Es sey AB = a, BC = x = AM, so ist in dem rechtwinklichten Dreyecke AMB:

$BM^2 = AB^2 - AM^2$, oder $BM^2 = a^2 - x^2$, also

$$BM = \sqrt{[a^2 - x^2]}.$$

Ferner hat man in den ähnlichen Dreyecken AMB und BMC:

AB : AM = BC : BM, oder

a : x = x : BM, also ist

$BM = \frac{x^2}{a}$, werden beyde gefundene Werthe von BM einander gleich gesetzt, so erhält man:

$$\frac{x^2}{a} = \sqrt{[a^2 - x^2]}, \text{ folglich } \frac{x^4}{a^2} = a^2 - x^2, \text{ mithin}$$

$$x^4 = - a^2 x^2 + a^4, \text{ folglich}$$

$$x = \pm \sqrt{[- \tfrac{1}{2} a^2 + \sqrt{\tfrac{5}{4} a^4}]}, \text{ oder}$$

$$x = \pm \sqrt{[- \tfrac{1}{2} a^2 + \tfrac{1}{2} a^2 \sqrt{5}]}, \text{ oder}$$

$$x = \pm \sqrt{[0{,}618 \ldots . a^2]},$$

$$x = \pm 0{,}786 \ldots . a.$$

Die doppelten Zeichen + und — rühren daher, weil man die Verzeichnung des Dreyecks ABC auch auf der andern Seite des Durchmessers AB machen kann.

§. 5.

Die Didaktyloïde läßt sich durch stetige Bewegnng eines Stiftes auf folgende Art beschreiben.

Es sey FG [Fig. 31.] eine Rinne; AB eine gegebene Linie, welche auf jene senkrecht gezogen ist, in den Endpuncten derselben werden in A und B Stifte eingeschlagen. DC ist ein Lineal, an welchem sich ein Schieber K befindet, der mit einem Stift c versehen ist, welcher in die Rinne GH genau passen muß. Auch sind an diesem Lineal zwey Stifte a und b befestiget, wovon der eine a die krumme Linie beschreiben soll.

Will man dieses Instrument gebrauchen, so wird an den Stift c ein Faden gebunden; dann das Lineal DC so gestellt, daß Aa = Bc ist. Nun wird dieser Faden um die Stifte B und A geschlagen, straff angezogen, um den Stift b gewunden, und an denselben befestigt. Wird nun das Lineal DC so herumgedrehet, daß es beständig an dem Stift A anliegt, während sich der Stift c nach G bewegt: so beschreibt der Stift a den einen Schenkel der Didaktyloïde AaO; denn vermöge der Einrichtung dieses Instruments, muß beständig Bc = Aa blei-

ben, weil der Theil des Fadens Ab um eben so viel kürzer wird, als sich der andere Bc verlängert.

Eben so lassen sich auch durch gehörige Umkehrung des Werkzeugs, die drey andern Schenkel dieser krummen Linie beschreiben, wie dieses leicht einzusehen ist.

Sechster Abschnitt.

Sechste krumme Linie.

Die Skyphoïde (Becherlinie) und deren Anwendung.

§. 1.

Es sey HI [Fig. 32.] eine gerade Linie und A ein gegebener Punct außer derselben; von A aus werde ABE durch HI senkrecht gezogen, so daß jene diese in B schneidet. Durch A ziehe man nach Gefallen die Linie AC, welche HI in C schneidet; durch C ziehe man MN auf AC senkrecht und nehme CM = CN = CB: so sind M und N Puncte in der Skyphoïde OMBNS. Auf diese Art kann man so viele Puncte der Linie bestimmen, als man nur will, und diese aus freyer Hand durch einen Zug verbinden.

Die Gleichung für die Skyphoïde läßt sich auf folgende Art finden. Man ziehe AM, ferner MP auf AB und MD auf HI senkrecht, und nenne $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$.

Da die Dreyecke ABC, ACM und APM rechtwinklicht sind, so hat man:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2, \text{ oder } AC^2 = a^2 + BC^2.$$

Auch hat man:

$$AM^2 = AC^2 + CM^2, \text{ folglich } AM^2 = a^2 + BC^2 + CM^2.$$

Ferner ist:

$$AM^2 = AP^2 + PM^2, \text{ oder } AM^2 = x^2 + y^2, \text{ mithin}$$

$a^2 + BC^2 + CM^2 = x^2 + y^2$, nun ist $CM = BC$, also ist

$$BC^2 = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2}.$$

Auch die Dreyecke ABC und CDM sind einander ähnlich, und man hat:

$$AB : BC = CD : DM.$$

Da $DM = BP = AB - AP$, so ist

$DM = a - x$, folglich

$a : BC = CD : a - x$, also ist

$$CD = \frac{a^2 - ax}{BC}, \text{ und } CD^2 = \frac{a^4 - 2a^3x + a^2x^2}{BC^2}, \text{ folglich}$$

$$CD^2 = \frac{2a^4 - 4a^3x + 2a^2x^2}{x^2 + y^2 - a^2}$$

Da $DM = a - x$, so ist $DM^2 = a^2 - 2ax + x^2$.

In dem rechtwinklichten Dreyecke CDM hat man:

$CM^2 = BC^2 = CD^2 + DM^2$, folglich ist

$$\frac{x^2 + y^2 - a^2}{2} = \frac{2a^4 - 4a^3x + 2a^2x^2}{x^2 + y^2 - a^2} + x^2 - 2ax + a^2, \text{ oder } x^2 + y^2 - a^2 =$$

$$\frac{2a^4 - 4a^3x + 4a^2x^2 + 2x^4 - 4ax^3 + 2x^2y - 4axy^2 + 2a^2y^2}{x^2 + y^2 - a^2}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$y^4 = (4a^2 - 4ax)\,y^2 + x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4 \text{ und}$$

$$y = \pm\sqrt{[2a^2 - 2ax + \sqrt{(x^4 - 4ax^3 + 10a^2x^2 - 12a^3x + 5a^4)}]}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $x = a$, so ist $y = 0$, die krumme Linie geht also durch B. Ferner ist für $x = \pm\infty$, auch $y = \pm\infty$.

Sowohl hieraus, aus der Gleichung und auch aus der Zeichnung der Skyphoïde ergiebt sich: 1) daß diese krumme Linie vom vierten Grade ist; 2) daß dieselbe von der Axe AE in zwey ähnliche und gleiche Hälften getheilt wird; 3) daß sie vier unendliche Schenkel hat, wie BMO, BO, BS und BR.

§. 2.

1. Aufgabe. In einem gegebenen rechtwinklichten Dreyeck ABE [Fig. 33.], soll ein rechter Winkel ACM so gelegt werden, daß der eine Schenkel desselben CM = BC sey, und der andere Schenkel CA durch A gehe.

Auflösung. Aus der gegebenen Linie AB und den rechten Winkel ABC, zeichne man den einen Schenkel der Skyphoïde BMN, welcher AE in M schneidet. Durch M und B ziehe man die gerade Linie MB, und halbire dieselbe in F, und von F aus, errichte man auf dieselbe die senkrechte FC, welche BE in C schneidet; werden nun die Linien CM und CA gezogen: so ist ACM der verlangte Winkel, wie aus der Eigenschaft der krummen Linie BMN erhellt, indem jedesmal BC = CM, und ACM ein rechter Winkel ist.

2. Aufgabe. BC und AM [Fig. 33.] durch Rechnung zu finden.

Auflösung. Man ziehe MD auf BE senkrecht und setze AB = a, BE = b, BC = CM = x.

Nun ist im Dreyeck ABC:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2, \text{ oder } AC^2 = a^2 + x^2, \text{ also}$$

$$AC = \sqrt{(a^2 + x^2)}.$$

Aus den beyden ähnlichen Dreyecken ABC und CDM erhält man:

$$AC : BC = CM : DM, \text{ oder}$$

$$\sqrt{(a^2 + x^2)} : x = x : DM, \text{ also}$$

$$DM = \frac{x^2}{\sqrt{(a^2+x^2)}}.$$

Auch hat man:

$$AC : AB = CM : CD, \text{ oder}$$

$$\sqrt{(a^2 + x^2)} : a = x : CD, \text{ mithin}$$

$$CD = \frac{ax}{\sqrt{(a^2+x^2)}}.$$

Da DE = BE — BC — CD, so ist

$$DE = b - x - \frac{ax}{\sqrt{(a^2+x^2)}}.$$

Ferner geben die beyden ähnlichen Dreyecke ABE und MDE:

$$DE : DM = BE : BA, \text{ oder}$$

$$b - x - \frac{ax}{\sqrt{(a^2+x^2)}} : \frac{x^2}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = b : a, \text{ also}$$

$$ab - ax - \frac{a^2 x}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = \frac{bx^2}{\sqrt{(a^2+x^2)}}, \text{ folglich}$$

$$(ab - ax) \sqrt{(a^2+x^2)} = bx^2 + a^2 x, \text{ mithin}$$

$$a^2 + x^2 = \left(\frac{bx^2 + a^2 x}{ab - ax}\right)^2, \text{ und die geordnete Gleichung ist:}$$

$$(b^2 - a^2) x^4 + 4a^2 bx^3 - a^2 b^2 x^2 + 2a^4 bx - a^4 b^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung kann man nach der bekannten Regel, jede biquadratische Gleichung aufzulösen, x oder BC finden. Ferner läßt sich aus AB und BC, im rechtwinklichten Dreyecke ABC, AC berechnen. Auch wird in dem Dreyecke ACM, aus AC und CM = BC leicht AM gefunden, und so der Punct M bestimmt.

In jener Aufgabe sind die Winkel ABC und ACM als rechte Winkel angenommen; dies ist aber nicht nothwendig, sondern man kann dieselben von jeder beliebigen Größe nehmen, nur wird dadurch die arithmetische Auflösung sehr beschwerlich. Bey der geometrischen Auflösung ist dieses aber der Fall nicht, und sie verdient daher wegen der leichtern Auflösung den Vorzug vor jener.

§. 3.

Auch die Skyphoïde läßt sich durch stetige Bewegung eines Stiftes beschreiben. Folgendes einfache Instrument ist dazu sehr dienlich.

Es sey [Fig. 34.] HI eine Rinne; CD und FE sind zwey unter einem rechten Winkel zusammen verbundene Lineale; in dem Winkelpunct derselben ist ein Stift a befestiget, welcher nach unten hervorsteht, und in der Rinne HI genau passen muß. M und N sind zwey Schieber, die sich an dem Lineale CD hin und her schieben lassen; der Schieber M ist mit einem Stift b, und N mit einem Stift d versehen, welche bestimmt sind, die krumme Linie zu beschreiben. Nun wird in A ein Stift eingeschlagen und AB auf HI senkrecht gezogen, ferner

wird an den Stift b und auch an den Stift d ein Faden gebunden; nachdem nun beyde Schieber so gestellt sind, daß ab = ad = aB ist, werden die Fäden über den Stift a geschlagen, dann ausgespannt und an einen Stift, der in c eingeschlagen ist, befestiget. Damit nun jene Fäden beständig gespannt bleiben, müssen die Schieber M nach D, und N nach C, durch Gewichte oder mit der Hand hingezogen werden.

Mit diesem Instrument wird die Skyphoïde auf folgende Art beschrieben. Man drehe die Vorrichtung so herum, daß das Lineal FE an dem Stift A anliegt, während sich der Stift a in der Rinne HI nach c bewegt, beschreibt der Stift b den Theil der krummen Linie bO und der Stift d den Theil dS, indem beständig aB = ab = ad bleibt, wie sich aus der Einrichtung dieses Instruments ergiebt und auch vermöge der Eigenschaft jener krummen Linie verlangt wird.

Siebenter Abschnitt.

Siebente krumme Linie.

Die Diloboïde (Zweyschotenlinie) und deren Anwendung.

---

§. 1.

Es sey GH (Fig. 43.) eine gerade Linie, und A ein gegebener Punct außer derselben; von A aus werde ABf durch GH senkrecht gezogen. Ferner ziehe man durch A irgend eine gerade Linie AC, welche GH in C schneidet; wird nun durch C, MCN auf AC senkrecht gezogen, und CM = CN einer gegebenen Linie gleich genommen: so sind M und N Punkte in der Diloboïde nQNpm QMq.

Die Gleichung für diese krumme Linie ist leicht gefunden. Man ziehe

MP auf AB, und MD auf GH senkrecht, und nenne $AB = a$, $CM = CN = b$, $AP = x$, $PM = y$: so ist $DM = BP = AB - AP = a - x$, und da die beyden Dreyecke ABC und CDM einander ähnlich sind, so hat man folgende Proportion:

$$AB : BC = CD : DM, \text{ oder}$$

$$a : BC = CD : a - x, \text{ also ist}$$

$$BC = \frac{a^2 - ax}{CD}.$$

Ferner ist in dem rechtwinklichten Dreyecke CDM:

$$CD^2 = CM^2 - DM^2, \text{ oder}$$

$$CD^2 = b^2 - [a - x]^2, \text{ folglich}$$

$$CD = \sqrt{[b^2 - a^2 + 2ax - x^2]} \text{ und}$$

$$BC = \frac{a^2 - ax}{\sqrt{[b^2 - a^2 + 2ax - x^2]}}.$$

Da $BC + CD = BD = PM = y$ ist, so ist

$$\frac{a^2 - ax}{\sqrt{[b^2 - a^2 + 2ax - x^2]}} + \sqrt{[b^2 - a^2 + 2ax - x^2]} = y,$$

folglich $b^2 + ax - x^2 = y\sqrt{[b^2 - a^2 + 2ax - x^2]}$, folglich

$$y = \pm \frac{b^2 + ax - x^2}{\sqrt{[b^2 - a^2 + 2ax - x^2]}}.$$

§. 2.

Setzt man in dieser Gleichung $x = 0$, so ist $y = \pm \frac{b^2}{\sqrt{[b^2 - a^2]}}$. Hieraus erhellt, daß in diesem Falle y möglich ist, wenn $a < b$, daß $y = \pm \infty$ wird, wenn $a = b$, und daß y unmöglich ist, wenn $a > b$ angenommen wird.

Für $x = a$, ist $y = \pm \frac{b^2}{\sqrt{b^2}} = \pm b$.

Für $x = a + b$, ist $y \pm \frac{ab}{o} = \pm \infty$.

Wird endlich $y = o$ gesetzt, so ist

$o = \frac{b^2 + ax - x^2}{\sqrt{[b^2 - a^2 + 2ax - x^2]}}$ folglich $o = b^2 + ax - x^2$, oder $x^2 = ax + b^2$, also ist $x = \frac{1}{2} a + \sqrt{[\frac{1}{4} a^2 + b^2]} = AQ$.

§. 3.

Aus den vorhin gefundenen Gleichungen, und auch aus der Zeichnung der krummen Linie ergiebt sich: 1) daß diese krumme Linie vom vierten Grade ist; 2) daß dieselbe von der Axe ABf in zwey ähnliche und gleiche Hälften getheilt wird; 3) daß dieselbe vier unendliche Schenkel QNp, QMq, Qm und Qan hat, die sich immer mehr und mehr den geraden Linien RfS und IcK, die in dem Abstand Bf = Bc = b mit GH parallel gezogen sind, nähern, ohne solche zu erreichen, und daß daher diese Linien die Asymptoten für jene Schenkel sind; 4) daß die krumme Linie, die Linie GH in zwey Puncten a und b schneidet, die von der Axe ABf um die Weite Bb = Ba = b entfernt sind; 5) daß der Durchschnittspunct Q der krumme Linie in der Axe ABf liegt, und wenn AB in d halbirt wird, alsdann dQ = db ist.

§. 4.

1. Aufgabe. Aus den gegebenen Seiten AB und CM [Fig. 44.] den Winkel BAM, und den beyden rechten Winkeln ABC und ACM, das Viereck ABCM zu zeichnen.

Auflösung. Mit den gegebenen Seiten AB und CM, den gegebenen Winkeln ABC und ACM zeichne man die Diloboïde EDM. Diese schneide den Schenkel AM des gegebenen Winkels BAM in M; aus M beschreibe man nun mit der gegebenen Linie MC einen Bogen, welcher BC in C schneidet; wird nun MC gezogen: so ist nach dem Vorhergehenden, ABCM das verlangte Viereck.

2. Aufgabe. Den Winkel BAC [Fig. 44.] durch Rechnung zu finden.

Auflösung. Es sey AB = a, CM = b, BAM = A, ABC =

$90°$, $ACM = 90°$, $BAC = z$, folglich $BCA = 90° - z$, $CAM = A - z$, und $CMA = 90° - A + z$. Es sey $90° - A = B$, so ist $CMA = B + z$.

Man hat also in dem Dreyecke ABC:

$$\sin. BCA : AB = \sin. ABC : AC, \text{ oder}$$

$$\cos. z : a = 1 : AC, \text{ also ist}$$

$$AC = \frac{a}{\cos. z}.$$

Ferner hat man in dem Dreyecke ACM:

$$\sin. CAM : CM = \sin. CMA : AC, \text{ oder}$$

$$\sin. [A - z] : b = \sin. [B + z] : AC, \text{ also}$$

$$AC = \frac{b \sin. [B + z]}{\sin. [A - z]}.$$

Werden diese beyde Werthe von AC einander gleich gesetzt, so bekommt man folgende Gleichung:

$$\frac{a}{\cos. z} = \frac{b \sin. [B + z]}{\sin. [A - z]}.$$

Nun ist bekanntlich

$$\sin. [B + z] = \sin. B. \cos. z + \sin. z. \cos. B \text{ und}$$
$$\sin. [A - z] = \sin. B. \cos. z - \sin. z. \cos. B, \text{ folglich}$$

$$\frac{a}{\cos. z} = \frac{b \sin. B. \cos. z + b \sin. z. \cos. B}{\sin. B. \cos. z - \sin. z. \cos. B}, \text{ oder}$$

$$(A) \quad a \sin. B. \cos. z - a \sin. z. \cos. B = b \sin. B. \cos. z^2 + b \sin. z. \cos. B \cos. Z.$$

Auch ist $\cos. z^2 = 1 - \sin. z^2$ und $\cos. z = \sqrt{[1 - \sin. z^2]}$.
Werden diese Werthe in die Gleichung A gesetzt, so erhält man:

$$(B) \quad a \sin. B \sqrt{[1 - \sin. z^2]} - a \sin. z. \cos. B = b \sin. B [1 - \sin. z^2] + b \sin. z \sqrt{[1 - \sin. z^2]}. \cos. B.$$

Zur Abkürzung sey sin. $B = c$, cos. $B = d$, sin. $Z = x$, folglich ist $ac\sqrt{[1 - x^2]} - axd = bc[1 - x^2] + bx\sqrt{[1 - x^2]}\,d$.

Hieraus entsteht durch Quadrirung und gehörige Reduction:

$$\text{(C)}\ [b^2c^2 + b^2d^2]x^4 - 4abcdx^3 + [a^2d^2 - 2b^2c^2 + a^2c^2 - b^2d^2]x^2 + 4abcdx + b^2c^2 - a^2c^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich nach der bekannten Regel, jede biquadratische Gleichung aufzulösen, x, folglich auch der Winkel BAC finden. In dieser Aufgabe, und auch in der vorhergehenden, sind die Winkel ABC und ACM als rechte Winkel angenommen worden, welches aber nicht nothwendig ist, sondern man kann dieselben von beliebiger Größe nehmen. In Fig. 45. ist $CM = CN = 3AB$, und $ACM = 30°$ genommen, alsdann hat diese krumme Linie einen Knoten, und auch vier unendliche Schenkel, wie aus der Figur zu ersehen ist. Wird der Winkel $ACM = 0$ genommen, so bekommt man die Conchoide des Nicomedes. Man sieht also hieraus, daß jene krumme Linie ihre Gestalt ändert, je nachdem der Winkel ACM, oder das Verhältniß der Linien AB und CM anders angenommen wird.

§. 5.

Diese krumme Linie läßt sich durch stetige Bewegung eines Stiftes auf folgende Art beschreiben. Es sey (Fig. 43.) GH eine Rinne; LC und MCN sind zwey zusammen verbundene Lineale, so daß LCM einem gegebenen Winkel, und $CM = CN$ einer gegebenen Linie gleich sey. In M, C und N befestige man drey Stifte, der Stift C geht nach unten, und muß in der Rinne GH genau passen; die Stifte M und N dienen, die krumme Linie zu beschreiben; noch wird in dem Endpunct A der gegebenen Linie AB ein Stift eingeschlagen. Wird nun das Lineal LC um den Stift A so gedreht, daß es beständig an demselben anliegt, während sich der Stift C in der Rinne nach H bewegt, so beschreiben die Stifte M und N die genannte krumme Linie.

Achter Abschnitt.

Noch einige neue krumme Linien vom dritten, vierten, fünften, sechsten, siebenten und achten Grade.

---

§. 1.

Achte krumme Linie.

Um den Mittelpunct B (Fig. 46.) sey mit dem Halbmesser BA = BF ein Kreis beschrieben, AF ein Durchmesser und AD eine Tangente in A. Durch F ziehe man nach Gefallen die gerade Linie FCDN, welche den Kreis in C, und die Tangente AD in D schneidet; wird nun auf FN, DM = DC genommen: so ist M ein Punct in einer krummen Linie vom dritten Grade, die zwey gleiche und unendliche Schenkel AMO und AQ, zwey Wendungspuncte, und eine Asymptote hat.

Um die Gleichung für diese krumme Linie zu finden, ziehe man CE und MP auf FAP senkrecht, und nenne AF = a, AP = x, PM = y.

Da CD = GM genommen ist, so ist AE = AP = x, und EF = a — x. Nun hat man vermöge der Eigenschaft des Kreises:

$$AE : EG = EC : EF, \text{ oder}$$

$$x : EG = EC : a - x, \text{ also ist}$$

$$EC = \sqrt{(ax - x^2)}.$$

Ferner hat man in den ähnlichen Dreyecken FEC und FPM:

$$FE : EC = FP : PM, \text{ oder}$$

$$a - x : \sqrt{[ax - x^2]} = a + x : y, \text{ folglich}$$

$$\frac{a - x}{a + x} y = \sqrt{[ax - x^2]}, \text{ mithin}$$

$$\frac{[a - x]^2}{[a + x]^2} y^2 = ax - x^2, \text{ folglich}$$

$$y = \pm \frac{a+x}{a-x} \sqrt{[ax - x^2]}, \text{ oder}$$

$$y = \pm [a+x]. \sqrt{\frac{x}{a-x}}.$$

Diese Gleichung läßt sich nach den Potenzen von x geordnet, so ausdrucken:

$$x^3 + 2ax^2 + [y^2 + a^2]\, x - ay^2 = 0.$$

§. 2.

Neunte krumme Linie.

Mit dem Halbmesser AB = BF (Fig. 48.) beschreibe mau aus B den Kreis AHFI nnd ziehe BD auf den Durchmesser AF senkrecht. Auf jener nehme man BD nach Gefallen und ziehe AD, die den Kreis in C schneidet; wird nun auf derselben CM = CD genommen, so ist M ein Punct der krummen Linie.

Um die Gleichung für dieselbe zu finden, ziehe man CE und MP auf AF senkrecht. Es sey AF = a, AP = x, PM = y.

Da CM = CD genommen ist, so ist

$$EP = EB = \frac{\frac{1}{2}a - x}{2} = \tfrac{1}{4}a - \tfrac{1}{2}x,$$

$$AE = \frac{\frac{1}{2}a - x}{2} + x = \tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{2}x \text{ und } FE = \tfrac{3}{4}a - \tfrac{1}{2}x.$$

Nun ist AE : EC = EC : EF, oder

$\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}x : EC = EC : \frac{3}{4}a - \frac{1}{2}x$, also ist

$$EC = \sqrt{[(\tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{2}x)(\tfrac{3}{4}a - \tfrac{1}{2}x)]}.$$

Ferner hat man in den ähnlichen Dreyecken AEC und APM:

AE : EC = AP : PM, oder

$\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}x : \sqrt{[(\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}x)(\frac{3}{4}a - \frac{1}{2}x)]} = x : y$, folglich

$$\frac{[\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}x]\,y}{x} = \sqrt{[(\tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{2}x)(\tfrac{3}{4}a - \tfrac{1}{2}x)]}, \text{ mithin}$$

$$\frac{[\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}x]^2 y^2}{x^2} = [\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}x].[\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}x.]$$

Hieraus erhält man: $y = \pm x \sqrt{\left(\frac{\frac{3}{2}a - x}{\frac{1}{2}a + x}\right)}$.

Diese krumme Linie ist vom dritten Grade, sie hat einen Knoten AHGIA, und zwey unendliche Schenkel AO und AQ, die sich einer geraden Linie immer mehr und mehr nähern, ohne solche zu erreichen, folglich sie zur Asymptote haben. Nach den Potenzen von x geordnet, läßt sich jene Gleichung so ausdrucken:

$$x^3 - \frac{3}{4}ax^2 + y^2 x + \frac{1}{2}ay^2 = 0.$$

§. 3.

Zehnte krumme Linie.

Mit dem Halbmesser BA = BF (Fig. 53.) beschreibe man um den Mittelpunct B den Kreis AGFCA und ziehe den Durchmesser AF. Durch A ziehe man irgend eine gerade Linie ACM, welche den Kreis in C schneidet; wird nun CE auf AF senkrecht gezogen und CM = CE genommen: so ist M ein Punct dieser krummen Linie.

Um eine allgemeine Gleichung für diese krumme Linie zu finden, ziehe man den Halbmesser BC, ferner MP auf AFP, und BD auf AC senkrecht, und nenne AB = a, AP = x, PM = y.

Da die Dreyecke ADB, AEC und APM einander ähnlich sind, so hat man folgende Proportion:

$$AM : AP = AB : AD, \text{ oder}$$

$$\sqrt{[x^2+y^2]} : x = a : AD, \text{ also ist}$$

$$AD = \frac{ax}{\sqrt{[x^2+y^2]}}.$$

Da DC = AD ist, so ist $2AD = \frac{2ax}{\sqrt{[x^2+y^2]}} = AG.$

Ferner hat man:

$$AM : PM = AC : EC, \text{ oder}$$

$$\sqrt{[x^2+y^2]} : y = \frac{2\,ax}{\sqrt{[x^2+y^2]}} : EC, \text{ also ist}$$

$$EC = \frac{2\,axy}{x^2+y^2} = CM. \text{ Nun ist } AM - AC = CM, \text{ oder}$$

$$\sqrt{[x^2+y^2]} - \frac{2\,ax}{\sqrt{[x^2+y^2]}} = \frac{2\,axy}{x^2+y^2}.$$

Hieraus entsteht durch Quadrirung und gehörige Reduction:

$$y^8+[4x^2-4ax]y^6+[6x^4-12ax^3]y^4+[4x^6+4a^2x^4-12ax^5]y^2 +4a^2x^6-4ax^7+x^8=0.$$

Die Polar-Gleichung für diese krumme Linie ist leicht gefunden. Es sey $AB = a$, $APM = \varphi$, $AM = y$.

Da $BCD = BAD$ ist, so ist
$EBC = 2\,EAC$, und man hat

$$\sin. BAC : BC = \sin. EBC : AC, \text{ oder}$$
$$\sin. \varphi : a = \sin. 2\varphi : AC, \text{ also ist}$$

$$AC = \frac{a \sin. 2\varphi}{\sin. \varphi}. \text{ Ferner ist}$$

$$\sin. BEC : BC = \sin. EBC : EC, \text{ oder}$$
$$1 : a = \sin. 2\varphi : EC, \text{ also ist}$$

$$EC = CM = a \sin. 2\varphi. \text{ Nun ist } AM = CM + AC, \text{ oder}$$

$$y = a \sin. 2\varphi + \frac{a \sin. 2\varphi}{\sin. \varphi}.$$

Bekanntlich ist $\sin. 2\varphi = 2 \sin. \varphi. \cos. \varphi$, folglich

$$y = 2\,a \sin. \varphi \cos. \varphi + 2\,a \cos. \varphi, \text{ oder}$$
$$y = (1 + \sin. \varphi) . (2\,a \cos. \varphi).$$

Aus dieser Gleichung läßt sich der ganze Zug der in einander geschlungenen

krummen Linie ARFNAOFMQA herleiten, wenn man den Winkel PAM $= \varphi$, von o an wachsen läßt, und für jeden angenommenen Winkel φ, den dazu gehörigen Werth von y sucht, und diesen von A aus auf AM trägt, und so Puncte wie M u. s. w. bestimmet.

Durch Zeichnung lassen sich Puncte der innern Theile dieser krummen Linie FNA und FOA finden, wenn man CN = CM nimmt. Auf diese Art kann man eine beliebige Anzahl Puncte der Linie wie N u. s. w. bestimmen, und diese aus freyer Hand durch einen Zug verbinden.

§. 4.

Eilfte krumme Linie.

Man beschreibe aus B mit dem Halbmesser BA (Fig. 54.) den Kreis AGFC, und ziehe alsdann den Durchmesser AF. Nun nehme man den Bogen FC nach Gefallen an, und ziehe CAN; ferner ziehe man CE auf AF senkrecht; wird nun AM = CE genommen: so ist M ein Punct dieser krummen Linie.

Es sey wie vorher $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$, so ist $AM = EC = \sqrt{(x^2 + y^2)}$.

Ferner ist nach §. 3. auch

$$EC = \frac{2\,axy}{x^2 + y^2}, \text{ folglich}$$

$$\sqrt{[x^2 + y^2]} = \frac{2\,axy}{x^2 + y^2}, \text{ folglich}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{4\,a^2 x^2 y^2}{x^4 + 2\,x^2 y^2 + y^4}.$$

Diese Gleichung gehörig reducirt, ist

$$y^6 + 3\,x^2 y^4 + (3\,x^4 - 4\,a^2 x^2)\,y^2 + x^6 = 0.$$

Um die Polar-Gleichung für diese krumme Linie zu finden, sey $AB = a$, $EAC = \varphi$, $EC = AM = y$. Nach §. 3. ist $EC = a \sin. 2\,\varphi$. Nun ist $\sin. 2\,\varphi = 2 \sin. \varphi \cos. \varphi$, folglich ist $y = 2\,a \sin. \varphi \cos. \varphi$.

Aus dieser Gleichung, und auch aus der Zeichnung ergiebt sich, daß diese krumme Linie vom sechsten Grade ist, und aus vier gleichen und ähnlichen Blättern oder Knoten, die in A mit einander vereinigt sind, besteht.

Um einen Punct eines äußern Knoten zu finden, wird AN = AM genommen, alsdann ist N ein Punct desselben.

§. 5.

Zwölfte krumme Linie.

Es sey (Fig. 55.) HC eine gerade Linie, A ein gegebener Punct außer derselben. Von A aus werde ABD auf HC senkrecht gezogen, auf dieser nehme man BC nach Gefallen, und ziehe MCAN; wird nun BM = BN = AC genommen: so sind M und N Puncte der krummen Linie RDMONAQ.

Um die Gleichung zu finden, ziehe man MP auf AD senkrecht, und nenne $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$.

Die ähnlichen Dreyecke ABC und APM geben

$$AP : PM = AB : BC, \text{ oder}$$
$$x : y = a : BC, \text{ also ist}$$

$$BC = \frac{ay}{x}, \text{ und } BC^2 = \frac{a^2 y^2}{x^2}. \quad \text{Nun ist}$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2, \text{ oder}$$

$$AC^2 = a^2 + \frac{a^2 y^2}{x^2} = BM^2$$

Da $BP = AP - AB$ ist, so ist $BP = x - a$, und

$$BP^2 = x^2 - 2ax + a^2. \quad \text{Ferner ist}$$
$$BP^2 + PM^2 = BM^2, \text{ folglich}$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2 + \frac{a^2 y^2}{x^2} \text{ mithin}$$

$$x^4 - 2ax^3 + y^2 x^2 = a^2 y^2. \text{ Hieraus folgt } y = \pm x \sqrt{\left(\frac{2ax - x^2}{x^2 - a^2}\right)},$$

$$\text{und } x^4 - 2ax^3 + y^2 x^2 - a^2 y^2 = 0.$$

§. 6.

Dreyzehnte krumme Linie.

Es seyn AB (Fig. 56.) der Halbmesser, und AF der Durchmesser des Kreises ADFC. Man nehme den Bogen FC nach Gefallen, und ziehe CA und CB; ferner sey CP auf AF senkrecht und jene nach M und N verlängert; wird nun CM = CG = CA genommen: so sind M und G Puncte der krummen Linie AQMEAGNO. Eben diese Verzeichnung kann man auch auf der andern Seite des Durchmessers AF machen.

Um die Gleichung für dieselbe zu finden, sey $AF = a$, $AP = x$, $PM = y$. Da $BP = AP - AB$ ist, so ist $BP = x - \frac{1}{2}a$. Nun ist $PC^2 = BC^2 - BP^2$, oder $PC^2 = \frac{1}{4}a^2 - (x - \frac{1}{2}a)^2$, folglich $PC^2 = ax - x^2$, also ist $PC = \sqrt{(ax - x^2)}$. Ferner ist $AC^2 = + AP^2\ PC^2$, oder $AC^2 = x^2 + ax - x^2$, also ist $AC = \sqrt{ax} = CM$. Nun ist $PM = PC + CM$, oder

$$y = \sqrt{(ax - x^2)} + \sqrt{ax}.$$

Wird diese Gleichung zweymal quadrirt und gehörig reducirt, so erhält man:

$$y^4 = (4ax - 2x^2)\ y^2 - x^4, \text{ folglich}$$

$$y = \pm \sqrt{[2ax - x^2 \pm x\sqrt{(4a^2 - 4ax)}]}.$$

Nach den Potenzen von x geordnet, ist diese Gleichung:

$$x^4 + 2y^2 x^2 - 4ay^2 x + y^4 = 0.$$

§. 7.

Vierzehnte krumme Linie.

Es sey (Fig. 57.) TASCAR die Didaktyloïde, welche Absch. V. §. 1. durch Puncte zu zeichnen, und §. 5. daselbst durch stetige Bewegung eines Stifts zu beschreiben, gezeigt ist; AB ist die Axe derselben, und HI auf AB senkrecht; ferner ist GBD mit HI parallel. Durch A ziehe man nach Gefallen die gerade Linie FACMD, welche die Didaktyloïde in C und F schneidet; wird nun CE

auf AB senkrecht gezogen, und CM = CE genommen: so ist M ein Punct der krummen Linie MAdcAmNAQ. Um die Knoten AmN und Acd zu zeichnen, wird FN = CM = CE genommen, und so der Punct N des Knotens AmN bestimmt.

Auf diese Art kann man eine beliebige Anzahl Puncte der Linie bestimmen, und diese aus freyer Hand durch einen Zug verbinden.

Um die Gleichung für diese krumme Linie zu finden, ziehe man MP auf AB senkrecht und nenne AB = a, AP = x, PM = y.

Da AEC, APM und ABD ähnliche Dreyecke sind, so hat man folgende Proportion:

$$AP : PM = AB : BD, \text{ oder}$$

$$x : y = a : BD, \text{ also ist}$$

$$BD = \frac{ay}{x} = AC, \text{ weil vermöge der Eigenschaft}$$

der Didaktyloïde allemal BD = AC ist. Ferner hat man:

$$AM : PM = AC : EC, \text{ oder}$$

$$\sqrt{[x^2 + y^2]} : y = \frac{ay}{x} : EC, \text{ also ist}$$

$$EC = \frac{ay^2}{x\sqrt{[x^2+y^2]}} = CM.$$

$$\text{Da } AM = AC + CM, \text{ so ist}$$

$$\sqrt{[x^2+y^2]} = \frac{ay}{x} + \frac{ay^2}{x\sqrt{[x^2+y^2]}}, \text{ folglich}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{ay}{x}\sqrt{[x^2+y^2]} + \frac{ay^2}{x}, \text{ oder}$$

$$x^3 + xy^2 - ay^2 = ay\sqrt{[x^2+y^2]}.$$

Diese Gleichung quadrirt und gehörig reducirt, ist:

$$y^4 = \left(\frac{2x^3 - 2ax^2 - a^2x}{2a - x}\right) y^2 + \frac{x^5}{2a - x}. \text{ Folglich}$$

$$y = \pm \sqrt{\left(\frac{x^3 - ax^2 - \frac{1}{2}a^2 x}{2a - x} \pm \frac{x}{2a - x}\sqrt{(a^3 x + \frac{1}{4}a^4)}\right)}.$$

Wird diese Gleichung nach den Potenzen von x geordnet, so kommt:

$$x^5 + 2y^2 x^3 - 2ay^2 x^2 + (y^4 - a^2 y^2) x - 2ay^4 = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung $a = 1$, und $y = \frac{1}{6}$, so erhält man

$$(A)\ x^5 + \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{18}x^2 - \frac{35}{1296}x - \frac{1}{648} = 0.$$

Es sey (Fig. 57.) $AB = 1$, $Ab = y = \frac{1}{6}\ AB = \frac{1}{6}$. Nun ziehe man durch b, abcd mit AB parallel, so schneidet jene die krumme Linie in a, c und d. Alsdann sind bc und bd die negativen Wurzeln, und ba ist eine positive Wurzel der Gleichung A. Da hier nicht mehr als diese drey Durchschnittspuncte möglich sind, und die Gleichung vom fünften Grade ist, so sind die beyden andern Wurzeln unmöglich.

Auf diese Art kann man in einzelnen Fällen, die Wurzeln der höhern Gleichungen durch Construction finden, die analytisch vielleicht nicht anders, als sehr beschwerlich durch Näherung gefunden werden können.

Dieses Verfahren will ich nun noch bey einer Gleichung vom sechsten Grade anwenden, und dazu die eilfte krumme Linie gebrauchen, welche §. 4. beschrieben und Fig. 54. abgebildet ist. Die dortige Gleichung

$y^6 + 3x^2 y^4 + (3x^4 - 4a^2 x^2) y^2 + x^6 = 0$, ist nach den Potenzen von x geordnet, folgende

$$x^6 + 3y^2 x^4 - (4a^2 y^2 - 3y^4) x^2 + y^6 = 0.$$

Für $y = \frac{1}{2}a$ ist dieselbe

$$(A)\ x^6 + \frac{3}{4}a^2 x^4 - \frac{13}{16}a^4 x^2 + \frac{1}{16}a^4 = 0.$$

Es sey (Fig. 54.) HA auf AF senkrecht und auf jene $Ab = \frac{1}{2}\ AB = \frac{1}{2}\ a$ genommen, ferner werde durch b, debac mit AF parallel gezogen; jene schneidet die krumme Linie in d, e, a und c: alsdann sind ba und bc zwey positive, und be und bd zwey negative Wurzeln der Gleichung A, folglich hat dieselbe vier mögliche und zwey unmögliche Wurzeln.

§. 8.

Funfzehnte krümme Linie.

Es sey [Fig. 51.] NAO eine Parabel, A ihr Scheitel und AF die Axe derselben. Durch A ziehe man nach Gefallen die gerade Linie ACM, welche die Parabel in C schneidet; wird nun CE auf AF senkrecht gezogen, ferner auf AM, CD = CE genommen: so ist D ein Punct einer krummen Linie vom sechsten Grade, die zwey unendliche Schenkel hat, wie sich aus der Gleichung und Zeichnung derselben ergiebt.

Die Gleichung für diese krumme Linie ist leicht gefunden. Man ziehe DB auf AF senkrecht und nenne den Parameter der Parabel = a, AB = x, BD = y.

Nun ergiebt sich aus den beyden ähnlichen Dreyecken AEC und ABD folgende Proportion:

$$BD : BA = EC : AE, \text{ oder}$$
$$y : x = EC : AE, \text{ also ist}$$
$$AE = \frac{x}{y} EC.$$

Auch giebt die Eigenschaft der Parabel

$$aAE = EC^2, \text{ also ist } AE = \frac{EC^2}{a}, \text{ folglich:}$$
$$\frac{EC^2}{a} = \frac{x}{y} EC, \text{ mithin } CD = EC = \frac{ax}{y}, \text{ und}$$
$$AE = \frac{ax^2}{y^2}. \text{ Auch ist } AC^2 = AE^2 + EC^2, \text{ oder}$$
$$AC^2 = \frac{a^2 x^4}{y^4} + \frac{a^2 x^2}{y^2}, \text{ folglich}$$
$$AC = \frac{ax}{y^2} \sqrt{(x^2 + y^2)}. \text{ Ferner ist}$$
$$AD = AC + CD, \text{ oder}$$

$$\sqrt{(x^2+y^2)} = \frac{ax}{y^2}\sqrt{(x^2+y^2)} + \frac{ax}{y}, \text{ mithin}$$

$$\left(1-\frac{ax}{y^2}\right)\sqrt{(x^2+y^2)} = \frac{ax}{y}, \text{ folglich}$$

$$\sqrt{(x^2+y^2)} = \frac{axy}{y^2-ax}.$$ Diese Gleichung quadrirt, und entwickelt, wird

$$y^6 + (x^2 - 2ax)y^4 - 2ax^3y^2 + a^2x^4 = 0.$$

§. 9.

Sechszehnte krumme Linie.

Es sey (Fig. 51.) NAO, wie in §. 8. angenommen ist, eine Parabel, A ihr Scheitel, und AF die Axe derselben. Durch A ziehe man irgend eine gerade Linie ACM, welche die Parabel in C schneidet; wird nun durch C, GCE auf AF senkrecht gezogen, und CG = CA genommen: so ist G ein Punct einer krummen Linie vom vierten Grade.

Es sey AE = x, EG = y, so ist, wenn der Parameter der Parabel a genannt wird,

$EC^2 = ax$, folglich $EC = \sqrt{ax}$. Nun ist

$AC^2 = EC^2 + AE^2$, oder $AC^2 = ax + x^2$, also ist

$AC = \sqrt{(ax + x^2)} = CG$. Ferner ist

$EG = EC + CG$, oder $y = \sqrt{ax} + \sqrt{(ax + x^2)}$. Diese Gleichung zweymal quadrirt, und geordnet, giebt

$$x^4 - 2y^2x^2 - 4ay^2x + y^4 = 0.$$

§. 10.

Siebenzehnte krumme Linie.

Es sey (Fig. 56.) AHFI eine Ellipse, AF die große und HI die kleine Axe derselben. Wird nun durch A irgend eine gerade Linie AC, welche die

Ellipse in C schneidet, gezogen, PCM auf AF senkrecht errichtet, und CM = CA genommen: so ist M ein Punct einer krummen Linie vom vierten Grade.

Um die Gleichung für diese krumme Linie zu finden, sey AF = a, HI = b, AP = x, PM = y.

Bekanntlich ist die Gleichung für die Ellipse

$$PC^2 = \frac{b^2 x}{a} - \frac{b^2 x^2}{a^2}, \text{ also ist } PC = \sqrt{\left(\frac{b^2 x}{a} - \frac{b^2 x^2}{a^2}\right)}.$$

Nun ist $AC^2 = AP^2 + PC^2$, folglich

$$AC^2 = x^2 + \frac{b^2 x}{a} - \frac{b^2 x^2}{a^2}, \text{ mithin}$$

$$AC = \sqrt{\left(x^2 + \frac{b^2 x}{a} - \frac{b^2 x^2}{a^2}\right)} = CM.$$

Ferner hat man

$$PM = PC + CM, \text{ oder}$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{b^2 x}{a} - \frac{b x^2}{a^2}\right)} + \sqrt{\left(x^2 + \frac{b^2 x}{a} - \frac{b^2 x^2}{a^2}\right)}.$$

$$ay = \sqrt{(ab^2 x - b^2 x^2)} + \sqrt{(a^2 x^2 + ab^2 x - b^2 x^2)}.$$

Hieraus entsteht durch Quadrirung und gehörige Reduction die Gleichung

$$x^4 + \left(\frac{4 b^2 y^2}{a^2} - 2 y^2\right) x^2 - \frac{4 b^2 y^2}{a} x + y^4 = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung b = a, so erhält man $x^4 + 2 y^2 x^2 - 4 ay^2 x + y^4 = 0$, welche die §. 6. gefundene Gleichung ist. In diesem Falle sind beyde Axen der Ellipse einander gleich, und sie wird ein Kreis, dessen Durchmesser = b = a ist.

§. 11.

Achzehnte krumme Linie.

Es sey (Fig. 51.) AmQM eine Cissoide, welche Absch. IX. §. 3. zu

zeichnen, und §. 4. durch ein Werkzeug zu beschreiben gewiesen werden soll. Durch A ziehe man irgend eine gerade Linie An, welche die Cissoide in Q schneidet; wird nun QB auf AF senkrecht gezogen, und Qn = QB genommen: so ist n ein Punct einer krummen Linie vom achten Grade.

Um die Gleichung für diese krumme Linie zu finden, ziehe man np auf AF senkrecht, und nenne AF = a, Ap = x, pm = y. Da die beyden Dreyecke ABQ und Apn einander ähnlich sind, so hat man folgende Proportion:

$$Ap : pm = AB : BQ, \text{ oder}$$
$$x : y = AB : BQ, \text{ also ist}$$
$$BQ = \frac{y}{x} AB, \text{ und}$$
$$BQ^2 = \frac{y^2}{x^2} AB^2.$$

Auch hat man aus der bekannten Gleichung für die Cissoïde:

$BQ^2 = \frac{AB^3}{a - AB}$, folglich ist $\frac{y^2}{x^2} AB^2 = \frac{AB^3}{a - AB}$, mithin $\frac{y^2}{x^2} = \frac{AB}{a - AB}$. Hieraus folgt $AB = \frac{ay^2}{x^2 + y^2}$, und $BQ = \frac{ay^3}{x^3 + xy^2} = Qn$. Ferner ist $AQ^2 = AB^2 + BQ^2$, oder

$$AQ^2 = \left(\frac{ay^2}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{ay^3}{x^3 + xy^2}\right)^2.$$ Hieraus erhält man

$AQ = \frac{ay^2}{x^3 + xy^2} \sqrt{[x^2 + y^2]}$, und da An = AQ + Qn ist, so ist

$\sqrt{[x^2 + y^2]} = \frac{ay^2}{x^3 + xy^2} \sqrt{[x^2 + y^2]} + \frac{ay^3}{x^3 + xy^2}$, folglich

$\left(1 - \frac{ay^2}{x^3 + xy^2}\right) \sqrt{[x^2 + y^2]} = \frac{ay^3}{x^3 + xy^2}$, folglich

$\sqrt{}\,[x^2 + y^2 = \frac{ay^3}{x^3 + xy^2 - ay^2}$. Diese Gleichung quadrirt, ist

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 y^6}{x^6 + 2y^2 x^4 - 2ay^2 x^3 + y^4 x^2 - 2ay^4 x + a^2 y^4}.$$

Hieraus entsteht durch Multiplication mit dem Nenner und gehörige Reduction die Gleichung

$$x^7 + 3y^2 x^5 - 2ay^2 x^4 + 3y^4 x^3 - 4ay^4 x^2 + [y^6 + a^2 y^4] x - 2ay^6 = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung $a = 1$, und $y = 2$, so erhält man

$$x^7 + 12x^5 - 8x^4 + 48x^3 - 64x^2 + 80x - 128 = 0.$$

Zieht man nun in dem Abstand $y = 2$, eine Linie mit AF parallel, welche jene krumme Linie vom siebenten Grade schneidet, und wird von diesem Durchschnittspuncte auf der verlängerten AF eine senkrechte Linie gezogen: so erhält man hiedurch eine Wurzel der letzten Gleichung, welche ich auf diese Art = 1, 31. gefunden habe.

Neunter Abschnitt.

Einige krumme Linien auf neue Art zu zeichnen, und auch durch Werkzeuge zu beschreiben.

§. 1.

Da die folgenden Verzeichnungen krummer Linien, so viel ich weiß, noch nicht bekannt sind, und so wohl dazu dienen können, noch einige neue und merkwürdige Eigenschaften der Linien kennen zu lernen, als auch neue Instrumente zu erfinden, um dieselben damit zu beschreiben: so will ich diese Verzeichnungen hier mittheilen, und mit der Cissoïde den Anfang machen.

§. 2.

Die Cissoïde zu zeichnen.

Es sey [Fig. 29.] ACB ein Halbkreis, welcher über den Durchmesser AB beschrieben ist. Durch B ziehe man nach Gefallen die gerade Linie BC, welche den Halbkreis in C schneidet; wird nun Cpm durch AB senkrecht, und AE mit CB parallel gezogen, und schneidet jene Cpm in m: so ist m ein Punct der Cissoïde AmN, wie sich folgendermaßen ergiebt.

Es sey AB = a, Ap = x, pm = y. Nun ist:

$$Bp : Cp = Cp : Ap, \text{ oder}$$
$$a - x : Cp = Cp : x, \text{ also ist}$$
$$Cp^2 = [a - x]\, x.$$

Ferner hat man:

$$pm : Ap = Ap : Cp, \text{ oder}$$
$$y : x = x : Cp, \text{ also ist}$$
$$Cp = \frac{x^2}{y}, \text{ und } Cp^2 = \frac{x^4}{y^2}. \quad \text{Folglich ist}$$
$$\frac{x^4}{y^2} = [a - x]\, x. \quad \text{Hieraus folgt } y^2 = \frac{x^3}{a - x}.$$

Aus dieser Gleichung ersieht man, daß AmN die Cissoïde ist, weil dieselbe die nämliche Gleichung hat.

§. 3.

Die Cissoïde auf eine andere Art zu zeichnen.

Auf dem halbirten Durchmesser ABF [Fig. 51.] des Kreises ACcFA, errichte man BD senkrecht; durch A ziehe man nach Gefallen die gerade ADM, welche den Kreis in C, und BD in D schneidet; nimmt man nun DM = DC: so ist M ein Punct der Cissoïde AmQM; denn wird MP auf AF senkrecht gezogen, und AF = a, AP = x, PM = y gesetzt, so ist BP = BE = x — $\frac{1}{2}$ a, und AE = a — x, nun ist:

AE : EC = AP : PM, oder

$a - x : \sqrt{(ax - x^2)} = x : y$. Hieraus erhält man die Gleichung für die Cissoïde $y^2 = \frac{x^3}{a - x}$, woraus also folgt, daß M ein Punct derselben ist.

Um Puncte für die Theile der Cissoïde zu finden, welche innerhalb des Kreises liegen, wird Adc nach Gefallen gezogen, und diese schneidet den Kreis in c, und BD in d; wird nun auf Ac, dm = dc genommen: so ist m ebenfalls ein Punct der Cissoïde.

§. 4.

Die Cissoïde noch auf eine andere Art zu zeichnen, und auch durch ein Werkzeug zu beschreiben.

Man ziehe (Fig. 1.) Bm auf MC senkrecht, so ist m ein Punct der Cissoïde Bmq; dann ziehe man mn auf BG, und mp auf BF senkrecht, und nenne DB = a, Bp = x, pm = y, so hat man wegen der ähnlichen Dreyecke Bpm, DBC und Cnm:

Bp : pm = DB : BC, oder

x : y = a : BC, also ist

$BC = \frac{ay}{x}$, und $nC = BC - Bn = \frac{ay}{x} - y$, oder

$nC = \frac{ay - xy}{x}$.

Ferner hat man:

pm : Bp = mn : nC, oder

y : x = x : nC, also ist

$nC = \frac{x^2}{y}$, folglich ist

$\frac{x^2}{y} = \frac{ay - xy}{x}$. Hieraus erhält man

$y^2 = \frac{x^3}{a - x}$, welches auch die vorhin gefundene Gleichung für die Cissoïde ist.

Wird in der Gleichung für die Ophiuride $y^2 = -\frac{ax}{b - x}y + \frac{x^3}{b - x}$ Absch. I. §. 1., $a = 0$ gesetzt, so kommt $y^2 = \frac{x^3}{b - x}$, welches die Gleichung für die Cissoïde ist.

Man sieht also hieraus, daß die Ophiuride sich der Cissoïde immer mehr und mehr nähert, je kleiner AB gegen BD angenommen wird, und daß die Ophiuride zur Cissoïde wird, wenn AB gegen BC verschwindet.

Aus diesen Betrachtungen folgt, daß sich auch die Cissoïde, mit dem in Absch. I. §. 13. beschriebenen, und Fig. 3. abgebildeten Instrumente, eben so sicher als die Ophiuride, construiren läßt.

Aus den beyden ersten Verzeichnungen der Cissoïde lassen sich gleichfalls Werkzeuge herleiten, um diese krumme Linien damit beschreiben zu können; allein da dieselben etwas zusammen gesetzt werden, und das vorher genannte sehr einfach ist, so will ich mich dabey nicht weiter aufhalten.

§. 5.

Die Kukumaide zu zeichnen.

Es sey AF (Fig. 47.) des Durchmesser des Kreises FCAF, und FD auf AF senkrecht. Durch A ziehe man irgend eine gerade Linie ACD, welche den Kreis in C, und FD in D schneidet; auf ACD nehme man nun CM = CD: so ist M ein Punct der Kukumaide OANFCAQ, wie aus der Gleichung für diese Linie erhellen wird.

Man ziehe CE und MP auf AF senkrecht, und heiße AF = a, AP = x, PM = y.

Da CM = CD angenommen ist, so ist EP = EF = $\frac{a-x}{2}$, und AE = $\frac{a+x}{2}$. Nun ist.

$$AE : EC = EC : EF, \text{ oder}$$

$$\frac{a+x}{2} : EC = EC : \frac{a-x}{2}, \text{ also ist}$$

$$EC = \tfrac{1}{2}\sqrt{[(a+x)(a-x)]}.$$ Ferner ist

$$AE : EC = AP : PM, \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{2}(a+x) : \tfrac{1}{2}\sqrt{[(a+x)(a-x)]} = x : y, \text{ folglich}$$

$$(a+x)\,y = x\sqrt{[(a+x)(a-x)]}.$$ Hieraus folgt

$$y = \pm x\sqrt{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)},$$ welches die Gleichung für die Kukumaïde ist, wenn in der Gleichung Absch. III. §. 1. x negativ genommen wird. Folglich ist M ein Punct derselben.

§. 6.

Die Kukumaïde auf eine andere Art zu zeichnen.

Es sey in Fig. 48. alles wie in Absch. VIII. §. 2., nur werde AM = CD genommen; alsdann ist M ein Punct der Kukumaide NMAmnAR, wie sich aus der folgenden Gleichung ergiebt.

Es sey AB = a, AP = x, PM = y.

Da AM = CD ist, so ist AP = BE = x, AE = a − x, und EF = a + x. Nun ist

$$AE : EC = EC : EF, \text{ oder}$$

$$a-x : EC = EC : a+x, \text{ also ist}$$

$$EC = \sqrt{[(a-x)(a+x)]}.$$ Ferner hat man:

$$AE : EC = AP : PM, \text{ oder}$$

a — x : $\sqrt{}$ [(a — x) (a + x)] = x : y. Hieraus erhält man die Gleichung für die Kukumaïde

$$y = \pm x \sqrt{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)}.$$ [S. Absch. III. §. 1.].

Wird Adc nach Gefallen gezogen, und schneidet dieselbe BD in d und den Kreis in c, und wird ferner Am = dc genommen: so ist m ein Punct des Knotens dieser krummen Linie.

§. 7.

Die Conchoïde zu zeichnen.

Um den Mittelpunct A [Fig. 50.] beschreibe man mit dem Halbmesser AB = AF den Kreis BCFG, und errichte auf den Endpuncten des Durchmessers BF die senkrechten Linien BD und LFN. Durch A ziehe man nach Gefallen die gerade Linie HD, welche LN in L, BD in D und den Kreis in C und G schneidet: wird nun auf HD, CM = CD, und GH = GD genommen: so sind M und H Puncte der Conchoïde,

Beweis. Da die beyden Dreyecke ABD und AFL einander gleich und ähnlich sind, so ist LA = AD, und LG = CD = CM, weil CD = CM angenommen ist: folglich sind die Linien ML = LH = CG = dem Durchmesser des Kreises, so wie AF, der Halbmesser desselben, beständige Größen, wie bey der Conchoïde erforderlich ist. Diese Conchoïde hat einen Knoten AMB, weil ML = LH größer als AF ist.

§. 8.

Die Conchoïde auf eine andere Art zu zeichnen.

Es sey FI [Fig. 49.] durch KnD senkrecht gezogen. Auf FI nehme man nA nach Gefallen an, und beschreibe aus A mit einem beliebigen Halbmesser AB, den Kreis BcCFgG. Durch A ziehe man irgend eine gerade Linie GADH, welche den Kreis in G und C, nD aber in D schneidet; wird nun auf GH, DM = DC, und DH = DG genommen: so sind M und H Puncte der Conchoïde.

Beweis. Da CD = DM, und DG = DH angenommen sind, so ist MH = CG dem Durchmesser des Kreises, und ML = LH = $\frac{1}{2}$ MH dem Halbmesser desselben gleich. Werden nun von den Puncten C, M und L auf FI, die senkrechten Linien Ce, Mp und LE gezogen, so sind die Dreyecke AeC, AnD, ApM und AEL einander ähnlich, folglich hat man die Proportion: AC : Ae = ML : pE. Nun ist AC = ML, mithin ist Ae = pE, und da CD = DM angenommen ist, so ist auch en = np und daher

Ae + en = np + pE, das ist An = nE, folglich AE = 2 An eine beständige Größe, weil An unveränderlich ist, woraus also wie vorher erhellt, daß M und H Puncte einer Conchoïde sind.

Wird die gerade gAdh so gezogen, daß der Durchschnittspunct d mit KD innerhalb des Kreises fällt, so wird dm = dc und dh = dg genommen, wo alsdann h und m Puncte der Conchoïde sind.

Nimmt man bey dieser Zeichnung der Conchoïde An = nB, so bekommt dieselbe eine Spitze, und wenn An $\lessdot$ als nB angenommen wird, einen Knoten; wovon man sich bey der Entwerfung der Zeichnung für diese Fälle leicht überzeugen kann.

Hieraus erhellt also, daß sich auf diese Art alle Conchoïden zeichnen lassen. Auch ist es leicht, daraus Instrumente herzuleiten, um dieselben durch stetige Bewegung eines Stiftes beschreiben zu können. Indessen will ich mich dabey nicht weiter aufhalten, da die bekannte Vorrichtung hierzu einfacher und sicherer ist, wie jene seyn würden.

§. 9.

Die Cardioïde zu zeichnen.

Man ziehe PA [Fig. 52.] auf FB senkrecht, und beschreibe aus A mit dem Halbmesser AB = AF den Kreis BCFH. Durch A ziehe man nach Gefallen die gerade Linie ACM, welche den Kreis in C schneidet; wird nun CE auf BF senkrecht gezogen und CM = EC genommen: so ist M ein Punct der Cardioïde AGBMFA, wie sich daraus ergiebt, wenn man die Gleichung für diese Linie sucht, welche leicht zu finden ist.

Man ziehe MP auf AP senkrecht, und nenne AB = AC = a, AP = x, PM = y.

Da die Dreyecke APM und CEA einander ähnlich sind, so hat man folgende Proportion:

$$AM : AP = AC : EC, \text{ oder}$$

$$\sqrt{[x^2 + y^2]} : x = a : EC, \text{ also ist}$$

$$EC = \frac{ax}{\sqrt{[x^2+y^2]}} = CM. \text{ Nun ist}$$

$$AM = AC + CM, \text{ oder}$$

$$\sqrt{[x^2 + y^2]} = a + \frac{ax}{\sqrt{[x^2+y^2]}}, \text{ folglich}$$

$$x^2 + y^2 = a\sqrt{[x^2 + y^2]} + ax, \text{ mithin}$$

$[x^2 + y^2 - ax]^2 = ax^2 + ay^2$. Hieraus erhält man durch Quadrirung und gehörige Reduction

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2ax^3 - 2axy^2 - a^2y^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung erhellt, daß diese krumme Linie die Cardioïde ist, weil dieselbe die nämliche Gleichung hat. [S. Klügels mathematisches Wörterbuch. Erster Theil, erste Abtheilung. Seite 396.]

Um die Theile FKA und AGB dieser krummen Linie zu zeichnen, ziehe man AGH nach Gefallen, welche den Kreis in H schneidet; wird nun HI auf FB senkrecht gezogen, und HG = HI genommen: so ist G ein Punct der Cardioïde.

Wird Am = EC genommen, so ist m ein Punct eines Kreises, und AD der Durchmesser desselben, wie sich ergiebt, wenn man die Gleichung dafür sucht.

§. 10.

Die Cardioïde auf eine andere Art zu zeichnen, und auch durch ein Werkzeug zu beschreiben.

Wie ich diese Verzeichnungsart entdeckte, waren schon alle Kupferplatten gestochen und abgedruckt, es fehlt also hierzu die nöthige Figur, welche ich indessen so genau angeben will, daß man sich dieselbe dazu leicht entwerfen kann.

Es sey AB der Durchmesser eines Kreises, und C der Mittelpunct des-

selben. Von C aus ziehe man nach Gefallen den Halbmesser CD, in D errichte man auf diesem die senkrechte Linie DM; wird nun durch A auf DM die senkrechte Linie AM gezogen: so ist M ein Punct der Cardioïde, wie sich ergiebt, wenn man für diese Linie die Gleichung sucht. Aus dieser Verzeichnung ergiebt sich ferner, daß sich die Cardioïde auch mit dem Fig. 3. abgebildeten Instrumente beschreiben läßt.

Wird der Punct A auf dem verlängerten Durchmesser BA ausserhalb des Kreises angenommen, und alsdann wie vorhin AM auf DM senkrecht gezogen: so ist M ein Punct einer Conchoïde mit einer circulären Basis. Auch diese Conchoïde läßt sich mit dem Fig. 3. abgebildeten Instrumente beschreiben, wie leicht einzusehen ist.

Zehnter Abschnitt.

Noch einige Bemerkungen über krumme Linien überhaupt, und ihre Anwendungen.

§. 1.

Die Anzahl der in dieser Schrift mitgetheilten krummen Linien hätte ich noch bedeutend vermehren können; allein anderweitige Arbeiten verhindern mich jetzt daran. Indessen will ich doch noch einige Bemerkungen über diesen Gegenstand, in der Kürze, hier mittheilen, und bey der ersten krummen Linie, der Ophiuride, den Anfang machen.

In Fig. 1., ist der Punct A, von dem auf CM, GF, und Ob die senkrechten Linien AM, AF u. s. w. gezogen sind, in der Linie OG angenommen, und auf diese Art sind Puncte der Ophiuride bestimmt. Nimmt man aber anstatt dessen, den Punct A außerhalb OG, etwa in P an, und zieht man von P aus, Pc auf Gc senkrecht: so wird hierdurch der Punct c einer krummen Linie bestimmt, die eben so wie die Ophiuride vom dritten Grade ist.

Um die Gleichung für diese Linie zu finden, ziehe man cK auf AH und cI auf OG senkrecht. Diese Linien cK und cI fehlen in der Figur, denn es waren schon alle Kupferplatten gestochen und abgedruckt, wie ich diese krumme Linie entdeckte. Indessen sind diese fehlenden Linien leicht zu zeichnen, da ich sie genau angegeben habe.

Es sey $AB = a$, $BD = b$, $AP = c$, $AK = Ic = x$, $Kc = AI = y$.

Da die Dreyecke PKc, GIc und DBG einander ähnlich sind, wie leicht zu beweisen ist, so hat man:

$$Kc : KP = cI : IG, \text{ oder}$$

$$y : x - c = x : IG, \text{ also ist}$$

$$IG = \frac{x^2 - cx}{y}.$$

Ferner hat man:

$$PK : Kc = BD : BG, \text{ oder}$$

$$x - c : y = b : BG, \text{ also ist}$$

$$BG = \frac{by}{x - c}.$$

Nun ist $IB = AB - AI$, oder $IB = a - y$, und

$$IG = IB + BG, \text{ folglich}$$

$$IG = a - y + \frac{by}{x - c}.$$

Auch ist vorhin $IG = \frac{x^2 - cx}{y}$ gefunden, folglich ist

$$a - y + \frac{by}{x - c} = \frac{x^2 - cx}{y}.$$

Hieraus folget:

$$y^2 = \left(\frac{ac - ax}{b + c - x}\right) y + \frac{c^2x - 2cx^2 + x^3}{b + c - x}, \text{ folglich ist}$$

$$y = \frac{\frac{1}{2}ac - \frac{1}{2}ax}{b+c-x} \pm \sqrt{\left(\frac{(\frac{1}{2}ac - \frac{1}{2}ax)^2}{(b+c-x)^2} + \frac{c^2x - 2cx^2 + x^3}{b+c-x}\right)}.$$

Diese Gleichung läßt sich nach den Potenzen von x geordnet, auch so ausdrücken, als:

$$(A)\ x^3 - 2cx^2 + \left.\begin{matrix} c^2 \\ +y^2 \\ -ay \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} -cy^2 \\ +acy \\ -by^2 \end{matrix}\right\} = 0.$$

Durch diese bisher betrachtete krumme Linie, kann man alle cubische Gleichungen construiren, und sie ist in dieser Hinsicht der Ophiuride vorzuziehen, weil sich dadurch nur cubische Gleichungen, deren zweytes Glied fehlet, construiren lassen.

Aufgabe. Die Gleichung $x^3 - 2fx^2 + gx + h = 0$ (B) zu construiren.

Auflösung. Die Zusammenhaltung dieser Gleichung mit der vorhin gefundenen Gleichung A giebt I. $-2c = -2f$. II. $c^2 + y^2 - ay = g$. III. $-cy^2 + acy - by^2 = h$.

Man hat also aus drey Gleichungen vier unbekannte Größen, a, b, c und y zu bestimmen. Folglich kann man eine von diesen vieren nach Gefallen annehmen. Setzt man nun $y = 1$, so erhält man $c = f$, $a = f^2 - g + 1$ und $b = f^3 - gf - h$.

1. Exempel. Die Wurzeln der Gleichung
$x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$ zu finden. Hier ist $2f = 2$, also
$f = 1$, $g = -13$, $h = -10$, folglich ist
$c = 1$, $a = 1 + 13 + 1 = 15$, und $b = 1 + 13 + 10 = 24$.

Man nehme also [Fig. 1.] $AB = a = 15$, $BD = b = 24$, $AP = c = 1$ und zeichne nach dem vorhergehenden Verfahren die krumme Linie. Wird nun in dem Abstand $AE = y = 1$, eine Linie mit AH parallel gezogen, so schneidet diese die krumme Linie in drey Puncten, wodurch man also die drey Wurzeln der Gleichung $x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$ erhält. Diese sind -1, -2, und $+5$.

2. Exempel. Die Wurzeln der Gleichung $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$ zu finden. Hier ist $-2f = 7$, also $f = -3\frac{1}{2}$, $g = +14$ und $h =$

$+ 8$, folglich ist $c = - 3\frac{1}{2}$, $a = 12\frac{1}{4} - 14 + 1 = - \frac{3}{4}$ und $b = - 42\frac{7}{8} + 49 - 8 = - 1\frac{7}{8}$.

In den beyden Normal-Gleichungen A und B sind alle Größen als positiv anzusehen; ändern diese in andern Fällen ihre Zeichen $+$ oder $\div$, so sind sie als negativ zu betrachten, und bekommen alsdann eine entgegengesetzte Lage, in Beziehung auf diejenige, welche sie in der Figur haben. In dem letzten Beyspiele bekommen demnach die Linien AB, BD und AP [Fig. 1.], woraus die krumme Linie gezeichnet wird, alle eine entgegengesetzte Lage. Die Durchschnittspuncte, welche die drey Wurzeln der Gleichung $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$ geben, fallen unterhalb der Linie OG; diese Wurzeln sind alle negativ, und $= - 1, - 2$ und $- 4$.

3. Exempel. Die Gleichung $x^3 + 6x^2 - 19x - 84 = 0$ zu construiren. Nach dem vorhergehenden Verfahren ist $- 2f = 6$, also $f = - 3$, $g = - 19$ und $h = - 84$, folglich ist $c = - 3$, $a = 9 + 19 + 1 = 29$ und $b = - 27 - 57 + 84 = 0$.

In den Fällen, wo $b = 0$ wird, verwandelt sich die krumme Linie in einen Kreis und in eine gerade Linie, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man die Linien a und c als beständige Größen annimmt, und dagegen b nach und nach kleiner werden läßt, und für diese Fälle sich die krumme Linie zeichnet.

Es sey [Fig. 2.] $AB = a = 29$, $AI = c = - 3$, $BD = b = 0$. Wird nun durch I und B eine gerade Linie IB gezogen, diese in K halbirt und mit dem Halbmesser $KI = KB$ ein Kreis beschrieben; wird ferner in dem Abstand $An = y = 1$, qnp mit IP parallel gezogen, und schneidet jene den Kreis zweymal und die gerade Linie IK einmal: so geben diese drey Durchschnittspuncte die Wurzeln der Gleichung $x^3 + 6x^2 - 19x - 84 = 0$, jene sind $- 3$, $+ 4$ und $- 7$.

Setzt man in der oben gefundenen allgemeinen Gleichung A, $y = 1$ und $B = 0$, so ist in der Gleichung B das letzte Glied $h = - c + ac = - f + f^3 - fg + f = f[f^2 - g]$. In diesem Falle verwandelt sich die Gleichung B in diese (C) $x^3 - 2fx^2 + gx + f[f^2 - g] = 0$, welche sich durch den Kreis und mehrere gerade Linien, nach dem vorhin gezeigten Verfahren, construiren läßt. Auch kann man nach dieser Gleichung eine jede Gleichung, wo die Coefficienten in Zahlen gegeben sind, leicht prüfen, ob sich dieselbe durch den Kreis

construiren läßt oder nicht. Z. B. Es sey die Gleichung $x^3 - 11x^2 + 23\frac{1}{2}x + 37\frac{1}{8} = 0$ gegeben. Hier ist $f = 5\frac{1}{2}$ und $g = 23\frac{1}{2}$, folglich $f[f^2 - g] = 37\frac{1}{8}$, gleich dem letzten Gliede der gegebenen Gleichung; woraus also folget, daß sich dieselbe durch den Kreis construiren läßt.

Setzt man in der Gleichung A, $AB = a = 0$, so fällt der Punct P in DF. Es sey p dieser Punct; wird von demselben pd auf GF senkrecht gezogen: so ist d ein Punct einer krummen Linie, die einen Knoten hat, und durch die Axe BF in zwey ähnliche und gleiche Hälften getheilt wird.

Nimmt man $Bp = BD$ an, so ist d ein Punct der Kukumaïde (S. Absch. III. §. 1.), wie sich ergiebt, wenn man für diesen Fall die Gleichung sucht.

Wird $Bp = 0$ gesetzt, so hat man die Cissoïde. S. Absch. IX. §. 4.

Wird $Bp = c$ negativ, und $<$ als b angenommen, so fällt p zwischen B und D irgendwo in r. Von r aus ziehe man re auf GF senkrecht, alsdann ist e ein Punct dieser Linie, welche die Gestalt der achten krummen Linie hat, und ganz über OG liegt.

Nimmt man r über D hinaus an, so bekommt man eine Linie, welche die entgegengesetzte Lage gegen die vorige hat, und unterhalb OG fällt.

Daß sich diese verschiedenen krummen Linien alle mit dem Fig. 3. abgebildeten Instrumente beschreiben lassen, ist leicht einzusehen, weil dieselben nur besondere Fälle von dem oben gegebenen allgemeinen Verfahren sind, folglich hierunter mit begriffen seyn müssen. Auch kann man mit demselben die Cardioïde, und Conchoïde mit einer circulären Basis beschreiben, wie Absch. IX. §. 10. gezeigt ist. Ferner lassen sich damit noch mehrere krumme Linien vom vierten Grade beschreiben; allein da sich dieses ohne Figuren nicht deutlich genug angeben läßt, so will ich mich dabey nicht weiter aufhalten.

Dieses Instrument ist daher, und auch besonders wegen seiner sichern Anwendung, für die Ausübung sehr nützlich.

§. 2.

In Absch. II. §. 4. ist die Toxoïde zur Construction einer cubischen Gleichung, deren drittes Glied fehlt, angewandt worden; diese krumme Linie läßt sich

indeß dahin verändern, daß man auch vollständige cubische Gleichungen dadurch construiren kann, wie ich gleich zeigen will.

Man verlängere (Fig. 15.) HB nach S, und nehme BS = b; ferner ziehe man durch S, ZST, und durch D, DU mit IA parallel; welche beyde FM in Z und U schneiden; nun nehme man ST = a und ziehe durch T nach Gefallen die gerade TDM: so bestimmt man auf diese Art, wie in Absch. II. §. 1. den Punct M.

Es sey TZ = x, ZM = y, und da TS = a angenommen ist, so ist ZS = PB = UD = x — a.

Da die Dreyecke TSD, DBP, TZM und DUM einander ähnlich sind, so hat man folgende Proportion:

$$TZ : ZM = TS : SD, \text{ oder}$$
$$x : y = a : SD, \text{ also ist}$$
$$SD = \frac{ay}{x}. \text{ Auch hat man}$$
$$SD : ST = PB : BD, \text{ oder}$$
$$\frac{ay}{x} : a = x - a : BD, \text{ also ist}$$
$$BD = \frac{x^2 - ax}{y} = PU.$$

Ferner hat man:

$$TZ : ZM = UD : UM, \text{ oder}$$
$$x : y = x - a : UM, \text{ also ist}$$
$$UM = \frac{xy - ay}{x}. \text{ Nun ist}$$
$$ZM = ZP + PU + UM, \text{ oder}$$
$$y = b + \frac{x^2 - ax}{y} + \frac{xy - ay}{x}, \text{ folglich}$$
$$xy = bx + \frac{x^3 - ax^2}{y} + xy - ay, \text{ mithin}$$

$ay^2 = bxy + x^3 - ax^2$. Hieraus ergiebt sich

$$y = \frac{bx}{2a} \pm \frac{x}{2a} \sqrt{(b^2 + 4ax - 4a^2)} \text{ und}$$

$$x^3 - ax^2 + byx - ay^2 = 0.$$

Aufgabe. Die Gleichung $x^3 - 3x^2 + 8x - 48 = 0$, durch die Toxoïde zu construiren.

Auflösung. Soll diese Gleichung mit der vorhin gefundenen Gleichung $x^3 - ax^2 + byx - ay^2 = 0$ einerley seyn, so hat man folgende drey Gleichungen: 1) $a = 3$, 2) $by = 8$, 3) $ay^2 = 48$, man suche hieraus b und y. Da $a = 3$ ist, so ist $3y^2 = 48$, folglich $y = 4$. Wird dieser Werth von y in die zweyte Gleichung gesetzt, so erhält man $4b = 8$, folglich ist $b = 2$.

Man nehme also (Fig. 15.) $TS = a = 3$, $SB = b = 2$, und beschreibe mit dem in Absch. II. §. 5. beschriebenen und Fig. 16. abgebildeten Instrument die Toxoïde BNM. Wird nun in den Abstand $ZM = y = 4$, QR mit ZT parallel gezogen, und schneidet jene die krumme Linie in M: so ist, wenn MZ auf ZT senkrecht gezogen wird, $ZT = x = 4$ die eine Wurzel der Gleichung $x^3 - 3x^2 + 8x - 48 = 0$, die beyden andern sind unmöglich und

$$1)\ x = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-47};\quad 2)\ x = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-47}.$$

§. 3.

Es sey GH (Fig. 21.) eine gerade Linie, B und m gegebene Puncte außer derselben. Durch B ziehe man nach Gefallen die gerade BM, welche GH in F schneidet; wird nun auf jener $FM = FC = Fm$ genommen: so sind M und C Puncte einer krummen Linie vom dritten Grade, die aus zwey unendlichen Schenkeln, und einem Oval besteht, welches aber mit der übrigen Linie nicht zusammen hängt, wie sich bey der Zeichnung dieser Linie leicht findet.

Um die Gleichung für diese Linie zu finden, ziehe man BA, mo und ME auf GH und mn auf BR senkrecht, ferner ziehe man mF und mE, und nenne $AB = a$, $om = b$, $mn = c$, $BP = x$, $PM = y$. Da die Dreyecke BAF und BPM einander ähnlich sind, so hat man folgende Proportion:

$$BP : PM = BA : AF, \text{ oder}$$

$$x : y = a : AF, \text{ also ist}$$

$$AF = \frac{ay}{x} \text{ und}$$

$$FE = y - \frac{ay}{x} = \frac{xy - ay}{x}.$$ Nun ist

$$mF^2 = om^2 + oF^2, \text{ oder}$$

$$mF^2 = b^2 + \left(\frac{ay}{x} - c\right)^2, \text{ folglich}$$

$$mF^2 = \frac{b^2x^2 + a^2y^2 - 2acyx + c^2x^2}{x^2} = FM^2.$$

Ferner hat man:

$$FM^2 = ME^2 + FE^2, \text{ oder}$$

$$\frac{b^2x^2 + a^2y^2 - 2acyx + c^2x^2}{x^2} = (x-a)^2 + \left(\frac{xy - ay}{x}\right)^2.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$y^2 = \frac{2ac}{2a - x}y + \frac{x^3 - 2ax^2 + a^2x - b^2x - c^2x}{2a - x}, \text{ folglich}$$

$$y = \frac{ac}{2a-x} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2c^2}{[2a-x]^2} + \frac{x^3 - 2ax^2 + a^2x - b^2x - c^2x}{2a - x}\right)}.$$

Diese Gleichung ist nach den Potenzen von x geordnet, folgende:

$$x^3 - 2ax^2 + (y^2 + a^2 - b^2 - c^2)x + 2acy - 2ay^2 = 0.$$

Aufgabe. Die Gleichung $x^3 - 11x^2 + 20x + 32 = 0$ zu construiren.

Auflösung. Man setze, diese Gleichung soll mit der vorhergehenden einerley seyn: so ist 1) $2a = 11$; 2) $y^2 + a^2 - b^2 - c^2 = 20$; 3) $2acy - 2ay^2 = 32$. Man hat also aus drey Gleichungen vier unbekannte Größen, a, b, c und y zu bestimmen. Folglich kann man eine von diesen nach Gefallen annehmen.

Es sey also $y = 2$, und da aus der ersten Gleichung $a = 5\frac{1}{2}$ gefunden

wird, so setze man diese beyden Werthe in die dritte Gleichung, alsdann kommt $22c - 44 = 32$. Folglich $c = \frac{76}{22} = 3,45$. Diese drey Werthe von y, a und c in die zweyte Gleichung gesetzt, geben $4 + 30\frac{1}{4} - b^2 - 11,5 = 20$. Hieraus erhält man $b = 1,53$.

Aus diesen drey gefundenen Größen kann man nach dem vorhin gezeigten Verfahren die krumme Linie zeichnen. Wird alsdann mit BR, in der Entfernung $y = 2$, eine Linie parallel gezogen: so geben die Durchschnitte derselben mit der krummen Linie die Wurzeln der Gleichung, diese sind:

1) $x = -1$.
2) $x = +4$.
3) $x = +8$.

Durch diese krumme Linie kann man also vollständige cubische Gleichungen, die drey mögliche Wurzeln haben, construiren, welches durch die Ophiuride und Toxoïde nicht geschehen kann.

§. 4.

Auf eben die Art, wie bisher die verschiedenen krummen Linien zur Construction der cubischen Gleichungen angewandt sind, läßt sich auch die Didaktyloïde zur Auflösung biquadratischer Gleichungen anwenden.

Es seyn (Fig. 28.) ab und no auf FG senkrecht. Durch a ziehe man nach Gefallen die gerade Linie dac, welche FG in c schneidet; wird nun auf jener $am = ad = cn$ genommen: so sind d und m Puncte der krummen Linie edvumsrw.

Um die Gleichung für dieselbe zu finden, ziehe man cn, und mp auf ab senkrecht, und nenne $ab = a$, $bo = b$, $on = c$, $ap = x$, $pm = y$, so ergiebt sich aus den ähnlichen Dreyecken apm und abc folgende Proportion:

$$ap : pm = ab : bc, \text{ oder}$$

$$x : y = a : bc, \text{ also ist}$$

$$bc = \frac{ay}{x}, \text{ und da}$$

$$co = bo - bc$$ ist, so ist $co = b - \frac{ay}{x}$, oder

$$co = \frac{bx - ay}{x}.$$

Ferner hat man in dem rechtwinklichten Dreyecke con:

$$cn^2 = on^2 + co^2, \text{ oder } cn^2 = c^2 + \left(\frac{bx - ay}{x}\right)^2, \text{ oder}$$

$$cn^2 = \frac{c^2x^2 + b^2x^2 - 2abyx + a^2y^2}{x^2} = am^2, \text{ weil } am = cn$$

angenommen ist. Nun ist

$$am^2 = ap^2 + pm^2, \text{ oder } am^2 = x^2 + y^2, \text{ folglich ist}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{c^2x^2 + b^2x^2 - 2abyx + a^2y^2}{x^2}.$$ Hieraus ergiebt sich:

$$x^4 - [b^2 + c^2 - y^2)\, x^2 + 2abyx - a^2y^2 = 0.$$

Aufgabe. Die biquadratische Gleichung $x^4 - 61x^2 + 168x - 108 = 0$, deren zweytes Glied fehlt, zu construiren.

Auflösung. Die Zusammenhaltung dieser Gleichung mit der vorhergehenden, giebt 1) $b^2 + c^2 - y^2 = 61$; 2) $2aby = 168$; 3) $a^2y^2 = 108$.

Da man hier aus drey Gleichungen vier unbekannte Größen a, b, c und y zu bestimmen hat, so kann man eine davon nach Gefallen annehmen. Es wird am bequemsten seyn y dazu zu wählen, weil man sonst im entgegengesetzten Falle, y durch eine vermischte quadratische Gleichung bestimmen müßte, welches unbequem seyn würde. Indessen kann man doch y nicht ganz beliebig annehmen, sondern es muß vorzüglich dahin gesehen werden, daß das Quadrat von c nicht negativ wird, weil alsdann c unmöglich würde, ferner auch darauf, daß die übrigen Größen a, b und c nicht zu groß und auch nicht zu klein ausfallen. Durch einige Proben wird sich der schicklichste Werth von y leicht finden lassen.

Es sey $y = 3$, so ist $y^2 = 9$. Diesen Werth in die dritte Gleichung gesetzt, giebt $9a^2 = 108$, folglich $a = \sqrt{12} = 3,46$. Werden diese beyden Werthe von y und a in die zweyte Gleichung gesetzt, so kommt $20,76\,b = 168$,

folglich $b = \frac{168}{20,76} = 8,08$. Setzt man nun diese drey gefundenen Werthe in die erste Gleichung $b^2 + c^2 - y^2 = 61$, so kommt $65,28 + c^2 - 9 = 61$. Aus dieser Gleichung erhält man $c^2 = 4,71$, folglich ist $c = \sqrt{4,71} = 2,17$. Zur leichtern Uebersicht will ich diese vier gefundenen Werthe hieher setzen, die folgende sind: $a = 3,46$; $b = 8,08$; $c = 2,17$; $y = 3$.

Man nehme nun (Fig. 28.) $ba = a = 3,46$, $bo = b = 8,08$, $on = c = 2,17$, und beschreibe darnach mit dem Fig. 31. abgebildeten, und Absch. V. §. 5. beschriebenen Instrumente, die krumme Linie usrwedv. Wird nun in der Entfernung $aq = y = 3$, vqrsu mit gab parallel gezogen, und schneidet jene die krumme Linie in v, r, s und u: so sind qr, qs und qu die drey positiven Wurzeln, und qv ist die negative Wurzel der gegebenen Gleichung $x^4 - 61x^2 + 168x - 108 = 0$.

Werden die Linien qr, qs, qu und qv mit einem genauen Maaßstabe gemessen, so findet man die vier Wurzeln: 1) $x = qr = +1$; 2) $x = qs = +2$; 3) $x = qu = +6$; 4) $x = qv = -9$.

Außer den verschiedenen Anwendungen, welche ich bisher von der Ophiuride, Toxoide, Kukumaide u. s. w. gemacht habe, lassen sich dieselben, eben so wie die noch übrigen krummen Linien, verschiedentlich anwenden. Allein da mich dieses jetzt zu weit führen würde, so will ich nur, sowohl hierüber, als auch wie noch mehrere neue krumme Linien gefunden werden können, einige allgemeine Bemerkungen mittheilen.

§. 5.

In Fig. 46. steht die Linie AD, von deren Durchschnittspunct D mit FM, die Linie DM = DC angenommen ist, auf dem Endpunct A des Durchmessers AF senkrecht. Wird aber anstatt dessen, oad durch AF senkrecht gezogen, durch F nach Gefallen die gerade Linie Fm gelegt, welche den Kreis in c, od in d schneidet, und nun dm = dc genommen: so ist m ein Punct einer krummen Linie vom dritten Grade. Die Gleichung für diese Linie hat zwey beständige Größen, nämlich FA und Fa, und sie ist daher brauchbar, cubische Gleichungen dadurch zu construiren.

Die Gestalt dieser Linie ist sehr verschieden, je nachdem ad verschiedentlich gezogen wird. Geht diese durch den Mittelpunct des Kreises, so bekommt man

die Cissoïde (S. Absch. IX. §. 3.); und wenn ad zwischen B und F durchgeht, eine krumme Linie, die einen Knoten hat.

Bis jetzt sind die nach Gefallen gezogenen Linien FM oder Fm durch den Endpunct F des Durchmessers gezogen worden. Wird aber bf, welche den Kreis in b und f schneidet, mit AF parallel gezogen, durch f irgend eine Linie fp gelegt, die den Kreis in n, und od in o schneidet; und nun op = on genommen: so ist p ein Punct einer krummen Linie, die ebenfalls vom dritten Grade ist, aber drey beständige Größen hat, und deswegen vorzüglich zur Construction der cubischen Gleichungen angewandt werden kann.

Diese krumme Linie ändert ihre Gestalt je nachdem od, bf, oder beyde Linien anders gezogen werden, oder auch wenn der Winkel daF größer oder kleiner genommen wird, wodurch also unzählige verschiedene krumme Linien entstehen.

Jenes Verfahren läßt sich auf eine ähnliche Art, auch bey den höhern krummen Linien vom vierten, fünften Grad u. s. w. anwenden; und es werden dieselben hiedurch, eben so wie die vom dritten Grade, zur Construction höherer Gleichungen dienlich seyn.

§. 6.

Um die Kukumaïde (Fig. 21.) zu zeichnen, wird FM = FA genommen. Nimmt man aber anstatt dessen FM = 2AF, so verändert sich hiedurch die Gestalt jener Linie und die Gleichung für dieselbe bekommt nun eine beständige Größe mehr. Es ist leicht einzusehen, daß wenn man dieses Verfahren auch bey andern Linien anwendet, dadurch unzählige neue krumme Linien entstehen, die eben so wie die vorhergehenden verschiedentlich angewandt werden können.

Eilfter Abschnitt.

Von der Verdoppelung des Würfels durch die Neilische Parabel.

§. 1.

Es sey (Fig. 17.) BO eine gerade Linie, AH auf BO senkrecht, AC und AB die beyden äußern Proportionalen. Durch B ziehe man nach Gefallen BD, welche AH in D schneidet; in D errichte man die senkrechte DL, welche BO in L schneidet; durch L ziehe man LN mit AH, und durch A, FG mit BD parallel: so schneiden sich beyde Linien in M, und M ist ein Punct in der Neilischen Parabel AMEK, wie sich in der Folge ergiebt. Auf diese Art kann man eine beliebige Anzahl Puncte dieser Linie bestimmen, und dieselben aus freyer Hand durch einen Zug verbinden.

Um die Gleichung für diese krumme Linie zu finden, ziehe man MP auf AH senkrecht, und setze AB = b, AP = LM = x, PM = AL = y. Die ähnlichen Dreyecke BAD, DAL und ALM geben:

$$BA : AD = AD : AL, \text{ oder}$$

$$b : AD = AD : y, \text{ also ist}$$

$$AD^2 = by.$$

Ferner hat man:

$$AD : AL = AL : LM, \text{ oder}$$

$$AD : y = y : x, \text{ also ist}$$

$$AD^2 = \frac{y^4}{x^2}, \text{ folglich}$$

$$\frac{y^4}{x^2} = by, \text{ oder } y^4 = byx^2, \text{ also}$$

$$y^3 = bx^2.$$

Aus dieser Gleichung erhellet schon, daß diese krumme Linie die Neilische Parabel ist, weil dieselbe die nämliche Gleichung hat.

§. 2.

Zur Verdoppelung des Würfels läßt sich die Neilische Parabel auf folgende Art anwenden. Es sey AC = a die Seite des gegebenen Würfels, AB = b = 2a; nun zeichne man nach dem vorhergehenden Verfahren die krumme Linie AMEK und ziehe durch C mit BL parallel die Linie CG, welche dann die krumme Linie in E schneidet; ferner von dem Durchschnittspunct E, ziehe man auf die verlängerte BL, die senkrechte EO: so ist AO die Seite des gesuchten Würfels, welcher doppelt so groß ist als der gegebene. Denn zieht man die Linie EA, und mit derselben BH parallel, welche AH in H schneidet; wird ferner HO gezogen, so ist, da die Dreyecke BAH, HAO und AOE ähnlich sind:

$$BA : AH = AH : AO = AO : OE,$$

folglich sind die vier Linien,

BA : AH : AO : OE in stetiger Proportion. Nun ist AC = OE = a, und AB = b = 2a genommen, folglich sind die Linien

2a : AH : AO : a in stetiger Proportion, mithin ist AO die Seite des gesuchten Würfels.

§. 3.

Die Neilische Parabel läßt sich auch durch stetige Bewegung eines Stifts beschreiben. Es seyn (Fig. 18.) JO und AH zwey senkrecht auf einander stehende Rinnen, BCML ein Parallel-Lineal; mit der einen Seite desselben BC ist das Lineal DK rechtwinklicht verbunden, das von dünnem Bleche ist, und unter dem Lineal LM durchgeht. In dem Winkelpunct beyder Lineale ist ein Stift c befestiget, welcher nach unten hervorsteht und in der Rinne AH genau passen muß. An dem andern Lineal LM ist ein Schieber F befindlich, welcher mit einem Stift b versehen ist, um mit demselben die Neilische Parabel zu beschreiben. GPN ist ein Winkelhaken, und an dem einen Schenkel PN sind zwey Stifte a und d befindlich, die in der Rinne JO passen müssen; der andere Schenkel ist von dünnem Blech und geht unter dem Lineal LM durch. Der Gebrauch dieses Instruments ist folgender. Man nehme AB dem Parameter der Parabel gleich; als-

dann wird in A und B ein Stift eingeschlagen; nun drehe man das Parallel Lineal so herum, daß die Ränder der Lineale BC und LM sich an den Stiften B und A hinschieben, und während dieser Bewegnng muß sich der Stift a an dem Rande des Lineals DK hin bewegen: alsdann beschreibt der Stift b, an dem Durchschnitt der Ränder des Lineals LM und dem Schenkel PG, die Neilische Parabel AbQ, wie aus der Aehnlichkeit der Dreyecke BAc, cAa und Aab erhellet. Den Schieber F kann man während des Gebrauchs des Werkzeugs mit der Hand gehörig fortschieben, oder sich auch dazu Fäden und Gewichte bedienen, wie vorhin mehrmals gezeigt ist.

Zwölfter Abschnitt.

Prüfung einer unrichtigen Auflösung des Delischen Problems, die neulich von A. W. Wlochatius angegeben worden ist.

---

§. 1.

Herr Wlochatius hat seine elementar-geometrische Auflösung des Delischen Problems in einer kleinen Schrift *) bekannt gemacht. Er führt in dem Vorbericht zu derselben an, daß er seit vier und dreyßig Jahren stets gewünscht hätte, jene Aufgabe durch Elementar-Geometrie aufgelös't zu sehen, oder selbst aufzulösen. Nach vielen Bemühungen wäre es ihm gelungen, genannte Auflösung zu erfinden, welche keiner vor ihm hätte erfinden können, u. s. w.

---

*) Elementar-geometrische Auflösung des Delischen Problems, der Aufgabe vom Dreyschnitt des Winkels und einiger anderen Sätzen, als ein reguläres 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 Eck geometrisch zu zeichnen, u. s. w. Erfunden und durch den Druck öffentlich bekannt gemacht von August Wilhelm Wlochatius, Doktor der Weltweisheit und außerordentlichem Professor derselben. Mit zwey Kupfertafeln. Königsberg, gedruckt bey Heinrich Degen. 1804.

Jene Aufgabe läßt sich aber nicht elementar-geometrisch auflösen, weil dieselbe bey der analytischen Auflösung bekanntlich auf eine cubische Gleichung führt. Der Kreis aber kann eine gerade Linie nur in zwey Puncten schneiden; folglich können seine Durchschnitte keine Wurzeln von höhern Gleichungen geben*). So unmöglich es also ist, jene Aufgabe durch Elementar-Geometrie aufzulösen, so hat doch unser Verfasser seine Beweise so scheinbar richtig vorgetragen, daß selbst der Recensent in der Hallischen Literatur-Zeitung, Jahrgang 1806. N. 204. dadurch getäuscht worden ist; denn die Auflösung unsers Verf. scheint dem Rec. eine mechanische Auflösung zu seyn, und er fordert daher denselben auf, seine Beweise noch einmal wieder vorzunehmen und strenge zu prüfen. Der Rec. in der Jenaer Allgemeinen Literatur-Zeitung Jahrg. 1807. N. 188, hat zwar jene Auflösung geprüft und die Lücken in den Beweisen aufgedeckt; allein gleichwohl die Unrichtigkeit derselben nicht hinlänglich dargethan und durch Beyspiele erläutert. Auch hat derselbe einige Sätze ohne Prüfung als wahr angenommen, die aber unrichtig sind, wie ich in der Folge zeigen werde.

Da ich in der Einleitung zu dieser Schrift verschiedene unrichtige Auflösungen von der Verdoppelung des Würfels angeführt habe, welche von Andern widerlegt worden sind; Wlochatius Auflösung dieser Aufgabe aber, so viel ich weiß, noch nicht vollständig geprüft worden ist, und diejenigen, die nicht hinlängliche Kenntniß der Geometrie besitzen, durch die Beweise des Verf. leicht getäuscht werden könnten: so glaube ich, daß eine vollständige Prüfung dieser Auflösung eben so nützlich, als hier am rechten Orte ist.

§. 2.

Wlochatius Vorschriften, um zwischen zwey gegebenen Linien, zwey mittlere Proportionallinien zu finden, worauf es bekanntlich bey der geometrischen Auflösung des Delischen Problems ankommt, sind folgende: **) „Wenn man mit AC als dem größern Theil des Durchmessers BC, nach Figur 7. (hier Fig. 19.), aus C den Bogen AE in dem über BC gelegten halben Kreise BDEC, und mit der zum Bogen AE gehörigen, und in AQ gelegten Sehne AE, aus Q

---

*) S. Kästners Analysis endlicher Größen. §. 512.

**) S. Seite 29. der vorher angeführten Schrift.

den Bogen AD in dem nämlichen halben Kreise BDEC ziehet; so ist die zu diesem Bogen AD gehörige Sehne AD allezeit die erste von den zwo mittlern continuirlichen Proportionallinien zwischen dem kleinern und größern Theil des Durchmessers BC, das ist, zwischen AB und AC."

§. 3.

Um diese Vorschriften vollständig prüfen zu können, will ich vorher eine Formel angeben, wodurch sich aus den gegebenen Linien AB und AC die Sehne AD leicht berechnen läßt, und dann untersuchen, ob und in welchen Fällen dieselbe die mittlere Proportionale seyn kann. Auf diese Art habe ich nicht nöthig mich auf die Beweise des Verfassers einzulassen, um dieselben zu prüfen; denn sind jene Vorschriften unrichtig, so fehlt auch allen folgenden Beweisen, wo dieselben als wahr angenommen werden, die geometrische Evidenz, und man hat nicht nöthig, sich weiter damit zu befassen.

Man ziehe (Fig. 19.) EN und DK auf OC senkrecht; alsdann die Sehnen: EC, EA, EB, DA und den Halbmesser DH, und mit diesem beschreibe man aus D den Bogen HLM, welcher OC in L schneidet; endlich wird noch DO gezogen.

Es sey nun AB = a, AC = EC = b, AD = x, und da die beyden Dreyecke CNE und CEB einander ähnlich sind, so hat man:

$$BC : EC = EC : NC, \text{ oder}$$

$$a + b : b = b : NC, \text{ also}$$

$$NC = \frac{b^2}{a+b}.$$

Ferner ist in dem rechtwinklichten Dreyecke ENC:

$$EN^2 = EC^2 - NC^2, \text{ oder}$$

$$EN^2 = b^2 - \frac{b^4}{(a+b)^2}.$$

Da AN = AC − NC, so ist

$$AN = b - \frac{b^2}{a+b}, \text{ oder } AN = \frac{ab}{a+b}.$$

Auch in dem rechtwinklichten Dreyecke ENA ist:

$$EA^2 = AN^2 + EN^2, \text{ oder}$$

$$EA^2 = \left(\frac{ab}{a+b}\right)^2 + b^2 - \frac{b^4}{(a+b)^2}, \text{ oder}$$

$$EA^2 = \frac{2\,ab^2}{a+b}, \text{ also ist } EA = \sqrt{\frac{2\,ab^2}{a+b}}.$$

Zur Abkürzung sey $EA = \sqrt{\frac{2\,ab^2}{a+b}} = AO = OD = m.$

Ferner ist:

$BH = DH = \frac{1}{2}\,BC = \frac{a+b}{2}$, und $AH = BH - BA$, oder

$AH = \frac{a+b}{2} - a$, oder $AH = \frac{b-a}{2}$; auch ist

$OH = OA + AH$, folglich $OH = m + \frac{b-a}{2}$.

Nach einem bekannten Satz aus der Trigonometrie hat man im Dreyecke OHD:

$$OH : OD + DH = OD - DH : OL, \text{ oder}$$

$$m + \frac{b-a}{2} : m + \frac{b+a}{2} = m - \frac{b+a}{2} : OL.$$

Nach gehöriger Rechnung erhält man:

$$OL = \frac{4\,m^2 - (b+a)^2}{4\,m + 2\,b - 2\,a}.$$

Bekanntlich ist im Dreyecke OHD:

$OK = \frac{1}{2}\,OH + \frac{1}{2}\,OL$, folglich

$$OK = \frac{1}{2}\left(m + \frac{b-a}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{4\,m^2 - (b+a)^2}{4\,m + 2\,b - 2\,a}\right).$$

Hieraus ergiebt sich:

$$OK = m - \frac{ab}{2m+b-a}.$$

Da $KA = OA - OK$, so ist $KA = m - \left(m - \frac{ab}{2m+b-a}\right)$,

oder $KA = \frac{ab}{2m+b-a}$.

Nach Pythagoras Lehrsatz ist:

$DK^2 = OD^2 - OK^2$, oder

$$DK^2 = m^2 - \left(m - \frac{ab}{2m+b-a}\right)^2, \text{ oder}$$

$$DK^2 = m^2 - \left(m^2 - \frac{2abm}{2m+b-a} + \frac{a^2b^2}{(2m+b-a)^2}\right),$$

oder $DK^2 = \frac{2abm}{2m+b-a} - \frac{a^2b^2}{(2m+b-a)^2}$, oder

$$DK^2 = \frac{4abm^2 + 2ab^2m - 2a^2bm - a^2b^2}{(2m+b-a)^2}.$$

Endlich hat man im rechtwinklichten Dreyecke DKA:

$AD^2 = DK^2 + KA^2$; oder

$$x^2 = \frac{4abm^2 + 2ab^2m - 2a^2bm - a^2b^2}{(2m+b-a)^2} + \frac{a^2b^2}{(2m+b-a)^2},$$

oder $x^2 = \frac{4abm^2 + 2ab^2m - 2a^2bm}{(2m+b-a)^2}$, oder

$$x^2 = \frac{(2m+b-a) \cdot (2abm)}{(2m+b-a)^2}, \text{ oder}$$

$$x^2 = \frac{2abm}{2m+b-a}, \text{ also}$$

$$x = \sqrt{\frac{2abm}{2m+b-a}}.$$

§. 4.

In Absch. I. §. 15. ist die erste mittlere Proportionale, die zwischen den beyden gegebenen Linien a und b liegt, gleich der $\sqrt[3]{ba^2}$ gefunden worden. Wird dieser Ausdruck dem vorhin gefundenen Ausdruck $\sqrt{\frac{2abm}{2m+b-a}}$ gleich gesetzt, so erhält man folgende Gleichung:

$$\sqrt[3]{ba^2} = \sqrt{\frac{2abm}{2m+b-a}}.$$

In diese Gleichung setze man für m den vorhin §. 3. gefundenen Werth, $m = \sqrt{\frac{2ab^2}{b+a}}$; wird nun die Seite des gegebenen Würfels für die Einheit genommen, und $a = 1$ gesetzt, so kommt:

$$\sqrt[3]{b} = b^{\frac{1}{3}} = \sqrt{\left\{\frac{2b\sqrt{\frac{2b^2}{b+1}}}{2\sqrt{\frac{2b^2}{b+1}}+b-1}\right\}}.$$

Um aus dieser Gleichung b zu finden, quadrire man dieselbe, so erhält man:

$$b^{\frac{2}{3}} = \frac{2b\sqrt{\frac{2b^2}{b+1}}}{2\sqrt{\frac{2b^2}{b+1}}+b-1}; \text{ demnach}$$

$$2b^{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2b^2}{b+1}} + b^{\frac{5}{3}} - b^{\frac{2}{3}} = 2b\sqrt{\frac{2b^2}{b+1}}, \text{ folglich}$$

$$b^{\frac{5}{3}} - b^{\frac{2}{3}} = (2b - 2b^{\frac{2}{3}})\sqrt{\frac{2b^2}{b+1}}, \text{ folglich}$$

$$\frac{b^{\frac{5}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}{2b - 2b^{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{2b^2}{b+1}}, \text{ folglich}$$

$$\frac{b - 1}{2b^{\frac{1}{3}} - 2} = \sqrt{\frac{2b^2}{b+1}}, \text{ folglich}$$

$$\frac{b^2 - 2b + 1}{4b^{\frac{2}{3}} - 8b^{\frac{1}{3}} + 4} = \frac{2b^2}{b+1}.$$

Nun ist die geordnete Gleichung:

$$\text{(A) } b^3 - 8b^{\frac{8}{3}} + 16b^{\frac{7}{3}} - 9b^2 - b + 1 = 0,$$

Man setze $\sqrt[3]{b} = y$, so ist $b = y^3$, $b^2 = y^6$, $b^{\frac{7}{3}} = y^7$, $b^{\frac{8}{3}} = y^8$, $b^3 = y^9$.

Diese Werthe von b setze man in die Gleichung A, so erhält man:

$$\text{(B) } y^9 - 8y^8 + 16y^7 - 9y^6 - y^3 + 1 = 0.$$

Wird in dieser Gleichung $y = +1$ gesetzt, so kommt:

$$1 - 8 + 16 - 9 - 1 + 1 = 0.$$

Hieraus erhellet also, daß $+1$ eine Wurzel der Gleichung B ist; folglich muß sich dieselbe durch $y - 1 = 0$ dividiren lassen, und geschieht dieses, so erhält man:

$$\text{(C) } y^8 - 7y^7 + 9y^6 - y^2 - y - 1 = 0.$$

In dieser Gleichung setze man nochmals $y = +1$, so kommt: $1 - 7 + 9 - 1 - 1 - 1 = 0$, woraus also folgt, daß nochmals $+1$ eine Wurzel derselben ist. Dividirt man nun die Gleichung C durch $y - 1 = 0$, so findet man:

$$\text{(D) } y^7 - 6y^6 + 3y^5 + 3y^4 + 3y^3 + 3y^2 + 2y + 1 = 0.$$

Diese Gleichung hat keine rationale Wurzel, wovon man sich durch die Probe leicht überzeugen kann; denn wenn man $y = +1$, oder $y = -1$ setzt, so wird in beyden Fällen die Gleichung nicht $= 0$.

§. 5.

Um nun die Gränzen der Wurzeln von dieser Gleichung kennen zu lernen, wenn dieselbe vielleicht mögliche Wurzeln hat, setze man sie $= Z$ und suche ihre Differentialformeln, als:

$$(E)\quad y^7 - 6y^6 + 3y^5 + 3y^4 + 3y^3 + 3y^2 + 2y + 1 = Z$$

$$7y^6 - 36y^5 + 15y^4 + 12y^3 + 9y^2 + 6y + 2 = \frac{dZ}{dy}$$

$$7y^5 - 30y^4 + 10y^3 + 6y^2 + 3y + 1 = \frac{d^2 Z}{6 . dy^2}$$

$$35y^4 - 120y^3 + 30y^2 + 12y + 3 = \frac{d^3 Z}{6 . dy^3}$$

$$140y^3 - 360y^2 + 60y + 12 = \frac{d^4 Z}{6 . dy^4}$$

$$7y^2 - 12y + 1 = \frac{d^5 Z}{360 . dy^5}$$

$$7y - 6 = \frac{d^6 Z}{720 . dy^6}.$$

Setzt man hier $+ 6$ statt y, so werden die Werthe aller Formeln von unten hinauf alle positiv, als:

$+ 36, + 181, + 17652, + 20595, + 33499, + 69059, + 27958$; also ist 6 größer als die größte positive Wurzel. Eben so giebt $y = - 1$ von unten hinauf abwechselnd $-$ und $+$: $- 13, + 20, - 548, + 176, - 43, + 51, - 8$; folglich ist $- 1$ größer als die größte verneinende Wurzel, und die Gränzen der Wurzeln sind $- 1$ und $+ 6$. (S. Kästners Analysis des Unendlichen. §. 197.),

§. 6.

Nun setze man in die Gleichung E, für y folgende Werthe, als: $y = - 1$, $y = 0$, $y = + 1$, $y = + \frac{3}{2}$; $y = + 2$, u. s, w. Nimmt man:

$y = - 1$, so ist $Z = - 4$

$y = 0$, — — $Z = + 1$

$y = +1$, so ist $Z = +10$
$y = +\frac{3}{2}$, — — $Z = +30$
$y = +2$, — — $Z = -71$
$y = +3$, — — $Z = -1100$
$y = +4$, — — $Z = -4113$
$y = +5$, — — $Z = -3914$
$y = +6$, — — $Z = +27985$.

§. 7.

Hieraus erhellet, daß zwischen -1 und 0 eine Wurzel der Gleichung D fallen muß. Ferner muß zwischen $\frac{3}{2}$ und 2 eine Wurzel enthalten seyn. Endlich fällt noch eine zwischen 5 und 6. Da bey dieser Aufgabe vorzüglich die positiven Wurzeln in Betracht kommen, so suche man dieselben nach der bekannten Näherungs-Methode. Man setze die Wurzel, die zwischen $\frac{3}{2}$ und 2 liegt, sey $= 1,56 + p = y$, so hat man:

$$\begin{array}{rcl} y^7 & = & 22,48 + 100,87p \ldots \\ -6y^6 & = & -86,46 - 332,28p \\ 3y^5 & = & 27,69 + 88,80p \\ 3y^4 & = & 17,76 + 45,48p \\ 3y^3 & = & 11,37 + 21,87p \\ 3y^2 & = & 7,29 + 3,36p \\ 2y & = & 3,12 + 2,00p \\ 1 & = & 1 \\ \hline 0 & = & 4,25 - 63,90p, \text{ mithin} \end{array}$$

$$p = \frac{4,25}{63,90} = 0,06, \text{ also}$$

$$y = 1,56 + 0,06 = 1,62.$$

Um diese Wurzel noch näher zu haben, so setze man wiederum: $y = 1,62 + p$, also

$$
\begin{array}{rcl}
y^7 & = & 29,283 + 126,595\,p \ldots \\
-6y^6 & = & -108,510 - 401,652\,p \\
3y^5 & = & 33,471 + 103,305\,p \\
3y^4 & = & 20,661 + 51,012\,p \\
3y^3 & = & 12,753 + 23,616\,p \\
3y^2 & = & 7,872 + 9,720\,p \\
2y & = & 3,240 + 2,000\,p \\
1 & = & 1 \\
\hline
0 & = & -0,230 - 85,404\,p,
\end{array}
$$

und

$$-0,230 = 85,404\,p,$$ folglich

$$p = -\frac{0,230}{85,404} = -0,00269,$$ also noch näher

$$y = 1,62 - 0,00269 = 1,61731.$$

Da die zweyte positive Wurzel der Gleichung D zwischen 5 und 6 fällt, so setze man dieselbe $= 5,3 + p = y$, also

$$
\begin{array}{rcl}
y^7 & = & 117471,113 + 155150,527\,p \ldots \\
-6y^6 & = & -132986,166 - 150550,344\,p \\
3y^5 & = & 12545,862 + 11835,720\,p \\
3y^4 & = & 2367,144 + 1786,524\,p \\
3y^3 & = & 446,631 + 252,810\,p \\
3y^2 & = & 56,180 + 31,800\,p \\
2y & = & 10,600 + 2,000\,p \\
1 & = & 1 \\
\hline
0 & = & -87,636 + 18509,037\,p,
\end{array}
$$

mithin

$$p = \frac{87,636}{18509,037} = 0,0047,$$ also

$$y = 5,3 + 0,0047 = 5,3047.$$

§. 8.

Hieraus ergiebt sich also, daß die Gleichung D drey mögliche Wurzeln hat:

1) eine negative zwischen -1 und 0,

2) eine positive $= 1,6173 \ldots$

3) noch eine positive $= 5,3047 \ldots$

Die Gleichung B hat außer diesen drey Wurzeln noch zwey gleiche, jede $= +1$, folglich hat sie im Ganzen fünf mögliche Wurzeln. Eben so viele mögliche Wurzeln hat bekanntlich auch die Gleichung A.

Da vorhin $y^3 = b$ gesetzt worden ist, so hat man für

$$y = 1 \qquad y^3 = b = 1$$
$$y = 1,6173 \qquad y^3 = b = 4,23038$$
$$y = 5,3047 \qquad y^3 = b = 149,27300.$$

Diese drey Werthe von b sind also die drey verschiedenen positiven Wurzeln der Gleichung A, welche hier nur vorzüglich in Betracht kommen.

§. 9.

Hieraus erhellt, daß Wlochatius Verfahren zwischen zwey gegebenen Linien, zwey mittlere geometrische Proportionallinien zu finden, nur in drey Fällen richtig ist, nämlich wenn sich die gegebenen Linien, wie die folgenden Zahlen gegen einander verhalten:

1) wie 1 : 1
2) — 1 : 4,23038
3) — 1 : 149,27300.

In allen andern Fällen findet eine größere oder geringere Abweichung Statt, nachdem das Verhältniß der gegebenen Linien, von den hier gefundenen Verhältnissen verschieden ist.

§. 10.

Jetzt will ich den arithmetischen Gebrauch der §. 3. gefundenen Formeln durch einige Beyspiele erläutern, und zur leichtern Uebersicht jene Formeln hierher setzen:

$$x = \sqrt{\frac{2abm}{2m + b - a}}, \text{ und } m = \sqrt{\frac{2ab^2}{a + b}}.$$

Es sey $2m + b - a = f$, und $2abm = g$, alsdann hat man:

$$\text{Log. } x = \frac{\text{Log. } g - \text{Log. } f}{2}$$

$$\text{Log. } m = \frac{\text{Log. } [2ab^2] - [\text{Log. } [a+b]}{2}$$

1. Exempel. Es sey $a = 1$, und $b = 1$, so ist

$$\text{Log. } m = \frac{\text{Log. } 2 - \text{Log. } 2}{2} = 0, \text{ also } m = 1, \; f = 2 \text{ und } g = 2,$$

folglich $\text{Log. } x = \frac{\text{Log. } 2 - \text{Log. } 2}{2} = 0$, mithin $x = 1$.

2. Exempel. Es sey $a = 1$, und $b = 2$, so ist

$$\text{Log. } m = \frac{\text{log. } 8 - \text{log. } 3}{2}$$

$\text{log. } 8 = 0{,}9030900$
$\text{log. } 3 = 0{,}4771213$

$\text{log. } m^2 = 0{,}4259687$
$\text{log. } m = 0{,}2129843$, also
$m = 1{,}632931$, $f = 4{,}265861$, $g = 6{,}53172$

$\text{log. } g. = 0{,}8150275$
$\text{log. } f. = 0{,}6300066$

$\text{log. } x^2 = 0{,}1850209$
$\text{log. } x = 0{,}0925104$, also $x = 1{,}2374$.

3. Exempel. Für $a = 1$ und $b = \infty$, ist

$$m = \sqrt{\frac{2\,\infty^2}{\infty}} = \sqrt{2\,\infty} = \sqrt{2} \times \sqrt{\infty}, \text{ oder}$$

$m = 1{,}412 . \infty^{\frac{1}{2}}$, folglich $f = \infty$ und

$$g = 2{,}824\ \infty^{\frac{3}{2}},\ \text{also ist}\ x = \sqrt{\left(\frac{2{,}824\ \infty^{\frac{3}{2}}}{\infty}\right)},\ \text{oder}$$

$$x = \sqrt{(2{,}824\ \infty^{\frac{1}{2}})},\ \text{oder}\ x = 1{,}68\ \infty^{\frac{1}{4}}.$$

§. 11.

Durch die gemeine Trigonometrie läßt sich die Sehne AD auf folgende Art finden. Man ziehe Hn auf CE senkrecht, so ist $Cn = \frac{1}{2}\ EC = \frac{1}{2}\ AC$. Es sey $BA = 1$, $AC = 2$, so ist $Cn = 1$ und $HC = BH = \frac{1}{2}\ BC = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$.

Da das Dreyeck HnC rechtwinklicht ist, so hat man:

$$HC : Cn = r : \cos.\ HCn,\ \text{also}$$

$$\begin{array}{rl} \log.\ r + \log.\ Cn = & 10{,}0000000 \\ \log.\ HC = & 0{,}1760913 \\ \hline \log.\ \cos.\ HCn = & 9{,}8239087 \\ HCn = & 48^\circ\ 11'\ 23''\ \text{folglich} \\ EAC = AEC = & 65^\circ\ 54'\ 18''. \end{array}$$

Ferner ist in dem Dreyeck AEC;

$$\sin.\ AEC : AC = \sin.\ ACE : AE,\ \text{also}$$

$$\begin{array}{rl} \log.\ \sin.\ ACE = & 9{,}8723632 \\ \log.\ AC = & 0{,}3010300 \\ \hline & 10{,}1733932 \\ \log.\ \sin.\ AEC = & 9{,}9604088 \\ \hline \log.\ AE = & 0{,}2129844,\ \text{also} \\ AE = & 1{,}633 = AO = OD. \end{array}$$

Da $AH = BH - BA$, so ist $AH = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$, folglich $OH = OA + AH = 2{,}133$ und $OD + DH = 3{,}133$, $OD - DH = 0{,}133$.

Nach einem bekannten Satz aus der Trigonometrie ist in dem Dreyeck OHD:

$$OH : OD + DH = OD - DH : OL, \text{ folglich}$$

$$\log.(OD - DH) = 0,1238516 - 1$$
$$\log.(OD + DH) = 0,4959604$$

$$0,6198120 - 1$$
$$\log. OH = 0,3289909$$

$$\log. OL = 0,2908211 - 1, \text{ also}$$
$$OL = 0,195353.$$

Bekanntlich ist $OK = \frac{1}{2} OH + \frac{1}{2} OL$, folglich $OK = 1,164176$.

Ferner hat man in dem Dreyecke OKD:

$$OD : OK = r : \cos. DOK, \text{ folglich}$$

$$\log. r + \log. OK = 10,0660187$$
$$\log. OD = 0,2129862$$

$$\log. \cos. DOK = 9,8530325, \text{ daher}$$

$$DOK = 44^\circ\ 31'\ 42'', \text{ folglich}$$
$$ODA = OAD = 67^\circ\ 44'\ 9''.$$

In dem Dreyecke OAD hat man:

$$\sin. ODA : OA = \sin. DOA : DA, \text{ folglich}$$
$$\log. \sin. DOA = 9,8458802$$
$$\log. OA = 0,2129862$$

$$10,0588664$$
$$\log. \sin. ODA = 9,9663514$$

$$\log. DA = 0,0925150, \text{ demnach } DA = 1,237414.$$

§. 12.

Diese gefundene Sehne AD kommt mit der vorhin §. 10., nach der daselbst befindlichen Formel, berechneten Länge genau überein. Indessen ist doch das letzte Verfahren sehr weitläuftig und es ist in mehr als einer Hinsicht die Berechnung durch die Formel vorzuziehen. Nach jener Formel sind die verschiedenen Werthe von x in folgender Tafel berechnet worden.

No.	Werthe von a	Werthe von b	Werthe von x	Erste geometrische Proportionale zwischen a und b	Unterschied zwischen x und der ersten Proportionale.
1	1	1	1	1,	0
2	1	2	1,2374	1,2599	— 0,0225
3	1	3	1,4279	1,4422	— 0,0143
4	1	4	1,5846	1,5874	— 0,0028
5	1	4,23038	1,61724	1,61730	— 0,00006
6	1	5	1,7186	1,7099	+ 0,0087
7	1	8	2,0369	2	+ 0,0369
8	1	64	4,1027	4	+ 0,1027
9	1	125	5,0317	5	+ 0,0317
10	1	149,2730	5,3045	5,3046	— 0,0001
11	1	216	5,9100	6	— 0,0900
12	1	343	6,5975	7	— 0,4024
13	1	1000	9,0630	10	— 0,9370
14	1	10000	16,5854	21,5443	— 4,9589
15	1	∞	$1,68\,\infty^{\frac{1}{4}}$	$\infty^{\frac{1}{3}}$	$-(\infty^{\frac{1}{3}} - 1,68\,\infty^{\frac{1}{4}})$.

In dieser Tafel zeigt die erste Columne die Anzahl der berechneten Fälle; die zweyte und dritte die Werthe für die beyden gegebenen äußern Proportionallinien a und b. Die vierte Columne enthält die verschiedenen Werthe von x oder der Sehne AD für die in der zweyten und dritten Columne angenommenen äußern Proportionallinien a und b. Die Zahlen in der fünften Columne sind die ersten Proportionalen zwischen a und b; sie entstehn, wenn man aus den ihnen zugehörigen Zahlen in der dritten Columne die Cubikwurzel auszieht. Die sechste Columne zeigt die Unterschiede zwischen den Zahlen in der vierten und fünften an.

Aus dieser Tafel ersieht man, daß wenn x oder die Sehne AD die erste mittlere geometrische Proportionale zwischen a und b seyn soll, alsdann Wlochatius Verfahren nur in drey Fällen, als No. 1, 5 und 10 richtig ist; in allen andern Fällen aber findet eine geringere oder größere Abweichung Statt, wie aus den Unterschieden in der sechsten Columne zu ersehen ist. Diese Unterschiede sind im Anfange negativ, und das Verfahren giebt die vermeinten Proportionalen zu klein an. Von No. 5 bis 10 sind die Differenzen positiv, und x oder die Sehne AD zu groß. Von No. 10 bis zu Ende werden alsdann diese Unterschiede wie-

der negativ, folglich sind die seynsollenden Proportionalen wieder zu klein. Auch sieht man hieraus, daß dieser Unterschied wächst, je größer b gegen a genommen wird, und daß derselbe größer werden kann, als jede Zahl, die sich angeben läßt, nämlich unendlich, wenn $b = \infty$ genommen wird. Demnach kann dieses Verfahren keine elementar-geometrische Auflösung des Delischen Problems genannt werden, weil dasselbe nur in ein paar Fällen das Gesuchte ganz richtig angiebt, in allen andern Fällen aber eine größere oder geringere Abweichung Statt findet. Indessen kann man doch, wo keine große Genauigkeit verlangt wird, von jenem Verfahren Anwendung machen.

§. 13.

Hier ist nun der Ort, die vorhin §. 1. erwähnten, und von dem Recensenten der Jenaer Literatur-Zeitung als wahr angenommenen, Sätze anzuführen und zu prüfen. Rec. behauptet, daß wenn man den Ausdruck $\sqrt[3]{(AB^2 . AC)}$, mit dem für die Sehne AD (Fig. 19.) nach Wlochatius Verfahren gleich setzen wollte, dieses auf Unmöglichkeiten führen würde. Diese Behauptung aber ist unrichtig, denn jene Ausdrücke führen auf eine Gleichung vom neunten Grade, die fünf mögliche Wurzeln hat; man sehe §. 2. Eben so wenig ist es richtig, daß AD keineswegs die gesuchte mittlere Proportionallinie seyn kann, da doch dieses in drey Fällen Statt findet, man sehe §. 8. Auch die Annahme, daß die Halbkreise BGN und KGL (Fig. 7. in Wlochatius Schrift) sich nicht im Perpendikel AZ schneiden können, ist nur, mit Ausnahme der vorhin angegebenen drey Fälle, richtig.

§. 14.

Nunmehr will ich noch durch ein Beyspiel zeigen, mit welcher Genauigkeit sich nach Wlochatius Methode das Delische Problem auflösen läßt.

Es sey die Seite des gegebenen Würfels in 1000 Theile getheilt, so findet man nach dieser Methode die Seite eines Würfels, welcher doppelt so groß ist als der gegebene = 1237 Theile, also um 22 Theile zu klein, wie sich aus dem berechneten zweyten Falle der obigen Tafel ergiebt. Wird also die Seite des gegebenen Würfels zu 10 Zoll angenommen: so bekommt man auf diese Art die Seite des gesuchten Würfels beynahe um $\frac{1}{4}$ Zoll zu klein, ein Fehler, welcher dem bloßen Auge schon sehr sichtbar ist.

Jene Auflösung des Delischen Problems läßt sich also auf drey vtrschiedene Arten prüfen: 1) mechanisch durch Zeichnungen im Großen; 2) durch die gemeine Trigonometrie, und 3) durch analytische Formeln wie vorhin gezeigt ist. Da unser Verfasser nach seiner eigenen Versicherung, sich viele Jahre mit der Auflösung dieses Problems beschäftiget hat: so ist es unbegreiflich, daß er nicht einmal auf den Gedanken gekommen ist, jene Prüfungen anzustellen, wo er denn die Unrichtigkeit seiner vermeinten Auflösnng leicht gefunden hätte.

Dreyzehnter Abschnitt.

Prüfung der von A. W. Wlochatius aufgestellten elementar-geometrischen Auflösung der Aufgabe vom Dreyschnitt des Winkels.

§. 1.

Hr. Wlochatius hat seine elementar-geometrische Auflösung der Aufgabe vom Dreyschnitt des Winkels in der vorhin angeführten kleinen Schrift *) auch mit bekannt gemacht. Seine Vorschriften, diese Aufgabe aufzulösen, sind folgende **). „Wenn zween Durchmesser AB und NM (Fig. 20.) sich unter beliebigen Winkeln schneiden, und der Bogen NDB durch DCF halbiret, sodann von A durch D nach P gezogen, DP = DC genommen, und P mit F verbunden wird; so wird E im Bogen NDB bestimmt, und es ist $BE = \frac{NDB}{3}$."

Um diese Vorschriften vollständig prüfen zu können, will ich eine Formel angeben, wodurch sich der Winkel ECB leicht und zuverlässig berechnen läßt.

---

*) Elementar-geometrische Auflösung des Delischen Problems u. s. w.

**) S. Seite 60 der eben angeführten Schrift.

Man ziehe die Sehne AF und DE, ferner Cm auf AF, CH auf DE, und CnL durch AD senkrecht. Es sey der Halbmesser CD = 1, der Winkel NCB = a, DCH = $\frac{1}{2}$ DCE = x; da nun ACD = 180° — DCB, so ist:

$ACD = 180° - \frac{1}{2} a$, und $\frac{1}{2} ACD = ACL = 90° - \frac{1}{4} a$, also $An = \sin. [90° - \frac{1}{4} a]$, folglich $An = \cos. \frac{1}{4} a$ und $2\, An = AD = 2 \cos. \frac{1}{4} a$.

Da AP = DC + AD, so ist $AP = 1 + 2 \cos. \frac{1}{4} a$.

Ferner ist $ACm = \frac{1}{4} a$, also $Am = \sin. \frac{1}{4} a$, und $2\, Am = FA = 2 \sin. \frac{1}{4} a$. Da DAF ein rechter Winkel ist, so hat man im Dreyecke PAF:

$PF^2 = AP^2 + AF^2$, oder

$PF^2 = [1 + 2 \cos. \frac{1}{4} a]^2 + [2 \sin. \frac{1}{4} a]^2$, oder

$PF^2 = 1 + 4 \cos. \frac{1}{4} a + 4 [\cos. \frac{1}{4} a]^2 + 4 [\sin. \frac{1}{4} a]^2$.

Nun ist $[\cos. \frac{1}{4} a]^2 + [\sin. \frac{1}{4} a]^2 = 1$, folglich

$PF^2 = 1 + 4 \cos. \frac{1}{4} a + 4$, oder

$PF^2 = \sqrt{} [5 + 4 \cos. \frac{1}{4} a]$.

Da die Dreyecke PAF und PED einander ähnlich sind, (Kästners ebene Trigonometrie 16 Satz] so hat man:

PF : FA = PD : DE, oder

$\sqrt{} [5 + 4 \cos. \frac{1}{4} a] : 2 \sin. \frac{1}{4} a = 1 : DE$, also ist

$$DE = \frac{2 \sin. \frac{1}{4} a}{\sqrt{} [5 + 4 \cos. \frac{1}{4} a]}.$$

Da $\frac{1}{2}$ DE = DH = sin. DCH = sin. x ist, so ist

$$\sin. x = \frac{\sin. \frac{1}{4} a}{\sqrt{} [5 + 4 \cos. \frac{1}{4} a]}, \text{ oder}$$

$$\sin. x = \sqrt{} \left(\frac{\sin. \frac{1}{4} a^2}{5 + 4 \cos. \frac{1}{4} a}\right). \text{ Folglich}$$

$$\log.\ \sin.\ x = \frac{2\log.\sin.\ \frac{1}{4}\ a - \log.\ [5 + 4\ \cos.\ \frac{1}{4}\ a]}{2},$$ oder

$$\log.\ \sin.\ x = \log.\ \sin.\ \tfrac{1}{4}\ a - \tfrac{1}{2}\log.\ [5 + 4\ \cos.\ \tfrac{1}{4}\ a].$$

Da DCH = x, so ist DCE = 2 x.

Nun soll nach Wlochatius Vorschriften DCB — DCE = ECB $= \frac{NCB}{3}$ seyn, das ist $\frac{1}{2}$ a — 2 x muß = $\frac{1}{3}$ a seyn.

1. Exempel. Es sey a = 30°, so ist $\frac{1}{2}$ a = 15° und $\frac{1}{4}$ a = 7° 30′, also

$$\begin{aligned}
\cos.\ \tfrac{1}{4}\ a &= 0{,}9914449\\
4\ \cos.\ \tfrac{1}{4}\ a &= 3{,}9657796\\
5 + 4\ \cos.\ \tfrac{1}{4}\ a &= 8{,}9657796\\
\log.\ [5 + 4\ \cos.\ \tfrac{1}{4}\ a] &= 0{,}9525880\\
\tfrac{1}{2}\log.\ [5 + 4\ \cos.\ \tfrac{1}{4}\ a] &= 0{,}4762940\\
10 + \log.\ \sin.\ \tfrac{1}{4}\ a &= 9{,}1156977\\
\tfrac{1}{2}\log.\ [5 + 4\ \cos.\ \tfrac{1}{4}a] &= 0{,}4762940\\
\hline
\log.\ \sin.\ x &= 8{,}6394037,\ \text{also}\\
x &= 2^\circ\ 29'\ 55''\\
2\ x &= 4^\circ\ 59'\ 50''\ \text{und}\\
\tfrac{1}{2}\ a - 2\ x &= 10^\circ\ 0'\ 10'' = ECB.
\end{aligned}$$

Dieser Winkel soll $\frac{1}{3}$ a = 10° seyn, folglich ist derselbe um 10″ zu groß.

2. Exempel. Es sey a = 90°, so ist $\frac{1}{2}$ a = 45° und $\frac{1}{4}$ = 22° 30′, also

$$\begin{aligned}
\cos.\ \tfrac{1}{4}\ a &= 0{,}9238795\\
4\ \cos.\ \tfrac{1}{4}\ a &= 3{,}6955180\\
5 + 4\ \cos.\ \tfrac{1}{4}\ a &= 8{,}6955180\\
\log.\ [5 + 4\ \cos.\ \tfrac{1}{4}\ a] &= 0{,}9392951\\
\tfrac{1}{2}\log.\ [5 + 4\ \cos.\ \tfrac{1}{4}\ a] &= 0{,}4696475\\
10 + \log.\ \sin.\ \tfrac{1}{4}\ a &= 9{,}5828397\\
\tfrac{1}{2}\log.\ [5 + 4\cos.\ \tfrac{1}{4}\ a] &= 0{,}4696475\\
\hline
\log.\ \sin.\ x &= 9{,}1131922,\ \text{also}
\end{aligned}$$

$$x = 7^\circ\ 27'\ 23''$$
$$2\ x = 14^\circ\ 54'\ 46''$$, folglich
$$\tfrac{1}{2}\ a - 2\ x = 30^\circ\ 5'\ 14'' = ECB.$$

Dieser Winkel soll $\frac{1}{3}$ a = 30° seyn, er ist also um 5′ 14″ zu groß.

3. Exempel. Es sey a = 174°, so ist $\frac{1}{2}$ a = 87° und $\frac{1}{4}$ a = 43° 30′, also

$$\cos.\ \tfrac{1}{4}\ a = 0,7253744$$
$$4\ \cos.\ \tfrac{1}{4}\ a = 2,9014976$$
$$5 + 4\ \cos.\ \tfrac{1}{4}\ a = 7,9014976$$
$$\log.\ [5 + 4\ \cos.\ \tfrac{1}{4}a] = 0,8977094$$
$$\tfrac{1}{2}\ \log.\ [5 + 4\ \cos.\ \tfrac{1}{4}a] = 0,4488547$$
$$10 + \log.\ \sin.\ \tfrac{1}{4}\ a = 9,8378122$$
$$\tfrac{1}{2}\ \log.\ [5 + 4\ \cos.\ \tfrac{1}{4}a] = 0,4488547$$
$$\log.\ \sin.\ x = 9,3889575$$
$$x = 14^\circ\ 10'\ 29''$$
$$2\ x = 28^\circ\ 20'\ 58''$$, folglich
$$\tfrac{1}{2}\ a - 2\ x = 58^\circ\ 39'\ 2'' = ECB.$$

Dieser Winkel ECB oder der Bogen EB ist also 39′ 2″ zu groß.

4. Exempel. Es sey a = 180°, so ist $\frac{1}{2}$ a = 90° und $\frac{1}{4}$ a = 45°, also

$$\cos.\ \tfrac{1}{4}\ a = 0,7071068$$
$$4\ \cos.\ \tfrac{1}{4}\ a = 2,8284272$$
$$5 + 4\ \cos.\ \tfrac{1}{4}\ a = 7,8284272$$
$$\log.\ [5 + 4\ \cos.\ \tfrac{1}{4}\ a = 0,8936744$$
$$\tfrac{1}{2}\ \log.\ [5 + 4\ \cos.\ \tfrac{1}{4}a] = 0,4468372$$
$$10 + \log.\ \sin.\ \tfrac{1}{4}\ a = 9,8494850$$
$$\tfrac{1}{2}\ \log.\ [5 + 4\ \cos.\ \tfrac{1}{4}a] = 0,4468372$$
$$\log.\ \sin.\ x = 9,4026478$$
$$x = 14^\circ\ 38'\ 19''$$
$$2\ x = 29^\circ\ 16'\ 38''$$
$$\tfrac{1}{2}\ a - 2\ x = 60^\circ\ 43'\ 22'' = ECB.$$

Dieser Winkel soll 60° seyn, er ist also 43′ 22″ zu groß.

§. 2.

Aus diesen Beyspielen ergiebt sich, wenn der Winkel NCB = a ≐
30° ist, daß alsdann ECB um 10″ zu groß ist
90° —, — — — — 5′ 14″ — — —
174° —, — — — — 39′ 2″ — — —
180° —, — — — — 43′ 22″ — — —

Wird demnach der Bogen BE dreymal im Kreise BEN herumgetragen, so findet man folgende Unterschiede:

$$3 \times 10'' = 30''$$
$$3 \times [5'\ 14''] = 15'\ 42''$$
$$3 \times [39'\ 2''] = 1^\circ\ 57'\ 6''$$
$$3 \times [43'\ 22''] = 2^\circ\ 10'\ 6''$$

Hr. Wlochatius wird also sein Verfahren wohl nicht bey einem Kreise versucht haben, wo 2 Grad merklich sind, sonst würde er die Unrichtigkeit desselben leicht gefunden haben.

§. 3.

Durch die gemeine Trigonometrie läßt sich jenes Verfahren auf folgende Art prüfen. Es sey CB = 10000000,

NCB = 174°, so ist DCB = ACF = 87°
ACD = 180° — DCB, oder
ACD = 180° — 87° = 93°, also
ACL = $\frac{1}{2}$ ACD = 46° 30′ und
ACm = $\frac{1}{2}$ ACF = 43° 30′ nun ist
Am = sin. ACm = 6883546
2 Am = AF = 13767092
An = sin. ACL = 7253744
2 An = AD = 14507488
AP = AD + DP = 24507488.

Da das Dreyeck PAF in A rechtwinklicht ist, so hat man:

$$PA : AF = r : \text{tang. } APF, \text{ also}$$

$$\log. r + \log. AF = 17{,}1388421$$
$$\log. PA = 7{,}3892987$$
$$\log. \text{tang. } APF = 9{,}7495434, \text{ also}$$
$$APF = 29^\circ\ 19'\ 30''.$$

Ferner hat man:

$$\sin. APF : AF = r : PF$$
$$\log. r + \log. AF = 17{,}1388421$$
$$\log. \sin. APF = 9{,}6899859$$
$$\log. PF = 7{,}4488562$$
$$PF = 28109700.$$

Auch sind die beyden Dreyecke PAF und PED einander ähnlich und man hat:

$$PF : AF = PD : DE$$
$$\log. PD + \log. AF = 14{,}1388421$$
$$\log. PF = 7{,}4488562$$
$$\log. DE = 6{,}6899859$$
$$DE = 4897630$$
$$\tfrac{1}{2} DE = 2448815 = DH = \sin. DCH.$$

Also DCH = 14° 10′ 29″ wie auch vorhin nach der Formel gefunden worden ist. Indessen ist doch die analytische Berechnung dieser vorzuziehen, weil dieselbe kürzer ist, und man nicht nöthig hat, so viele Zwischensätze zu suchen.

Vierzehnter Abschnitt.

Prüfung der von A. W. Wlochatius erfundenen, sogenannten elementar-geometrischen Zeichnungen einiger regulären Vielecke, als ein 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 und 29 Eck.

§. 1.

Bekanntlich lassen sich durch die Elementar-Geometrie nur folgende reguläre Vielecke zeichnen, als ein 3, 6, 12, 24 Eck u. s. w. — 4, 8, 16 Eck u. s. w. — 5, 10, 15 Eck u. s. w. — 15, 30, 60 Eck u. s. w. Da die Verzeichnungen der Vielecke, welche Hr. Wlochatius bekannt gemacht hat *), unter jenen (das Fünfeck ausgenommen) nicht mit begriffen sind; so folgt hieraus, daß seine Vorschriften nicht ganz richtig seyn können; vielleicht kommen aber dieselben der Wahrheit so nahe, daß die etwaigen Abweichungen beym practischen Gebrauche unbedeutend sind. In dieser Hinsicht kann also eine vollständige Prüfung jener Verzeichnungs-Regeln nützlich seyn, um zu erfahren, ob und in welchen Fällen dieselben anwendbar sind oder nicht.

Die Vorschrift der Zeichnung eines regulären Fünfecks von Wlochatius, ist wörtlich folgende:

„Wenn die halbe Peripherie (Seite 71. Figur 22, in dieser Schrift Fig. 35) in N, und der Halbmesser AC in K halbirt, sodann von B durch N unbestimmt fortgezogen, und in K das Loth von unbestimmter Länge errichtet wird, so schneiden sich diese zwo Linien in L. Ziehet man nun von L nach C, so wird der Punct M bestimmt, und AM ist $= \frac{\text{Peripherie}}{5}$."

Prüfung. Es sey (Fig. 35.) AC = CB = 10000000 = dem Radius der trigonometrischen Tafeln, alsdann ist KC = 5000000 und KB 15000000

*) S. Elementar-geometrische Auflösung des Delischen Problems u. s. w. Seite 71 bis 96.

Wird nun NC gezogen, so ist NCB = 90°, folglich CBN = CNB = KLB = 45°, folglich KL = KB = 15000000, und da das Dreyeck CKL rechtwinklicht ist, so hat man folgende Proportion:

$$KC : KL = r : \text{tang. } KCL, \text{ also ist}$$

$$\begin{array}{r} \text{log. } r + \text{log. } KL = 17,1760913 \\ \text{log. } KC = 6,6989700 \\ \hline \text{log. tang. } KCL = 10,4771213. \end{array}$$

KCL = 71° 33′ 54″, dieser Winkel sollte

$\frac{360°}{5}$ = 72° — — seyn, folglich ist derselbe um . . . . — 26′ 6″ zu klein.

Wird nun die Sehne AM = MO = OP = PQ = QR fünfmal im Kreise herumgetragen, so bleibt von dem Umfange desselben der Bogen RA = 5 × (26′ 6″) = 2° 10′ 30″ übrig.

Wird nun die Länge dieses Bogens zu $\frac{1}{50}$ Zoll angenommen, so findet man den Umfang des Kreises ANBQA durch folgende Proportion:

2° 10′ 30″ : 360° = $\frac{1}{50}$ Zoll : dem Umfange des Kreises. Dieser Umfang ist demnach = 3,31 Zoll, und der Durchmesser desselben = 1,05 Zoll. Da eine Länge von $\frac{1}{50}$ Zoll dem bloßen Auge sehr sichtbar ist, so kann diese Vorschrift, ein reguläres Fünfeck zu zeichnen, nur bey ganz kleinen Kreisen anwendbar seyn. Eine richtige Vorschrift, um ein reguläres Fünfeck zu zeichnen, findet man in Euklids Elemente 4. Buch. 11. Satz.

Mit wenigen Worten will ich bey der Prüfung dieses Vielecks, und auch der folgenden Vielecke, am Ende jedesmal die Lücken in den Beweisen unsers Verf. angeben. Seite 73 heißt es: „so ists offenbar, daß DL = DC." Diese Behauptung ist unrichtig und ohne allen Beweis angenommen.

§. 2.

Zeichnung eines regulären Siebenecks.

„Wenn über dem Durchmesser AB (Seite 81. Figur 26. hier Fig. 36.) das gleichseitige Dreyeck ALB errichtet, der Halbmesser AC in K halbiret, und

von L nach K gezogen wird, so wird der Punct N bestimmt, und es ist $\frac{NB}{2} = \frac{\text{Peripherie}}{7}$."

Prüfung. Man ziehe LC, LA, NC, und setze CA = CB = 10000000, so ist KC = 5000000, und da das Dreyeck ALB gleichseitig ist, so ist der Winkel ABL = 60°, folglich ist in dem rechtwinklichten Dreyecke LCB, LC = der Tangente des Winkels CBL = 17320508.

Nun hat man in dem Dreyecke KCL folgende Proportion:

$$LC : KC = r : \text{tang. } CLK, \text{ also ist}$$

$$\begin{array}{rl} \log. r + \log. KC = & 16,6989700 \\ \log. LC = & 7,2385491 \\ \hline \log. \text{tang. } CLK = & 9,4604209, \text{ folglich} \\ CLK = & 16^\circ\ 6'\ 9''. \end{array}$$

Ferner ergiebt sich aus dem Dreyeck NCL:

$$NC : \sin. CLK = LC : \sin. LNC, \text{ also}$$

$$\begin{array}{rl} \log. LC = & 7,2385491 \\ \log. \sin. CLK = & 9,4430382 \\ \hline & 16,6815873 \\ \log. NC = & 7,0000000 \\ \hline \log. \sin. LNC = & 9,6815873, \text{ giebt} \\ LNC = & 151^\circ\ 17'\ 23'' \text{ und} \\ KNC = & 28^\circ\ 42'\ 37''. \end{array}$$

Da NCL = KNC — CLK, so ist

$NCL = 12^\circ\ 36'\ 28''$, nun ist

$NCB = NCL + LCB$, also

$NCB = 102^\circ\ 36'\ 28''$, und

$\frac{NCB}{2} = 51^\circ\ 18'\ 14''$, dieser Winkel soll

$\frac{360^\circ}{7} = 51^\circ\ 25'\ 42''$ seyn, folglich ist derselbe um
7′ 28″ zu klein.

Wird nun die Sehne des Bogens $\frac{NB}{2}$ siebenmal im Kreise herumgetragen, so bleibt von dem Umfange desselben ein Bogen von $7 \times (7'28'') = 52'\ 16''$ übrig. Soll die Länge dieses Bogens wie vorhin nicht über $\frac{1}{50}$ Zoll betragen, so muß der Durchmesser des dazu gehörigen Kreises, nicht mehr als 2, 6 Zoll ausmachen. Da eine Länge von $\frac{1}{50}$ Zoll dem bloßen Auge noch sehr sichtbar ist, so kann dieß Verfahren, ein reguläres Siebeneck zu zeichnen, gleichfalls nur bey kleinen Kreisen, die nicht über 2, 6 Zoll im Durchmesser sind, angewandt werden, wenn jener Fehler nicht zu merklich seyn soll.

In den Beweisen der obigen Vorschrift, ein reguläres Siebeneck zu zeichnen, wird Seite 82 gesagt: „Man trisezire den Bogen ENG, so ist EN = NF = FG, und NG = 2 EN.“ Dieses ist unrichtig, und kann also nicht bewiesen werden.

§. 3.

Zeichnung eines regulären Eilfecks.

„Wenn über dem Durchmesser (Seite 83. Figur 27., in dieser Schrift Fig. 37.) das gleichseitige Dreyeck ALB errichtet, mit dem Halbmesser AC der Bogen CK geleget, und von L nach K gezogen wird, so wird der Punct D bestimmt, und es ist $\frac{DB}{3} = \frac{\text{Peripherie}}{11}$.

Prüfung. Man ziehe LC, DC, CK und AK; nun sey der Halbmesser AC = CK = 10000000, so ist wie vorhin LC = 17320508, und da das Dreyeck ACK gleichseitig ist, so ist der Winkel ACK = 60°, folglich LCK = 150°, und LKC + KLC = 30°.

Nun hat man im Dreyecke LCK folgende bekannte Proportion:

$$LC + CK : LC - CK$$
$$= \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(LKC + KLC) : \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(LKC - KLC),$$

$$\log. \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ [LKC + KLC] = 9{,}4280525$$
$$\log. [LC - CK] = 6{,}8645407$$
$$\overline{\qquad\qquad 16{,}2925932}$$
$$\log. [LC + CK] = 7{,}4364815$$
$$\overline{\log. \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ [LKC - KLC] = 8{,}8561117}$$
$$\tfrac{1}{2}\ [LKC - KLC] = 4^\circ\ 6'\ 24''$$, folglich
$$LKC = 19^\circ\ 6'\ 24''$$ und
$$KLC = 10^\circ\ 53'\ 36''.$$

Ferner ergiebt sich aus dem Dreyecke LCD:

$DC : \sin. DLC = LC : \sin. LDC$, also ist

$$\log. LC = 7{,}2385491$$
$$\log. \sin. DLC = 9{,}2764184$$
$$\overline{\qquad\qquad 16{,}5149675}$$
$$\log. DC = 7{,}0000000$$
$$\overline{\log. \sin. LDC = 9{,}5149675}$$
$$LDC = 160^\circ\ 53'\ 39''$$
$$KDC = 19^\circ\ 6'\ 21''.$$

Da $DCL = KDC - KLC$, so ist

$DCL = 8^\circ\ 12'\ 45''$, nun ist

$DCB = DCL + LCB$, also ist

$DCB = 98^\circ\ 12'\ 45''$ und

$\frac{DCB}{3} = 32^\circ\ 44'\ 15''$, dieser Winkel sollte

$\frac{360^\circ}{11} = 32^\circ\ 43'\ 38''$ seyn, folglich ist derselbe um

37″ zu groß.

Trägt man nun die Sehne des Bogens $\frac{DB}{3}$ eilfmal im Kreise herum,

so fehlet an dem Umfange desselben ein Bogen von $11 \times 37'' = 6' \, 47''$. Soll die Länge dieses Bogens nur $\frac{1}{50}$ Zoll betragen, so kann man schon den Durchmesser des dazu gehörigen Kreises zu 20, 32 Zoll annehmen, woraus also erhellt, daß jene Vorschrift ein reguläres Eilfeck zu zeichnen, bey großen Kreisen anwendbar, folglich von bedeutendem Nutzen ist.

Seite 84. heißt es: „so ist $DM = MN = NF$." Ferner auf derselben Seite: „so ist $AR = RG = GM = MF$." Hier wird also erstlich der Bogen DF in drey gleiche Theile getheilt, wo M ein Theilpunct desselben ist; ferner wird der Bogen AF in vier gleiche Theile getheilt und M auch hier als Theilpunct angenommen, welches aber unrichtig ist.

§. 4.

Ein reguläres Dreyzehneck zu zeichnen.

„Wenn der Halbmesser AC (Seite 86. Figur 28. hier Fig. 38.) in K halbiret, in K eine senkrechte Linie KZ errichtet, sodann mit dem Durchmesser BA der Bogen AM geleget, und durch ihn KZ in L geschnitten wird, so wird durch LC der Punct E bestimmt, und es ist $\frac{EB}{4} = \frac{\text{Peripherie}}{13}$."

Prüfung. Es sey $AC = 10000000$, so ist $KC = 5000000$, $KB = 15000000$ und $LB = AB = 20000000$; wird nun LB gezogen, so hat man in dem rechtwinklichten Dreyecke LKB:

$$LB : r = KB : \cos. KBL$$
$$\log. r + \log. KB = 17,1760913$$
$$\log. LB = 7,3010300$$
$$\overline{\log. \cos. KBL = 9,8750613}$$
$$KBL = 41^\circ \, 24' \, 35''.$$

Auch hat man:

$$r : \text{tang}. KBL = KB : LK$$
$$\log. KB = 7,1760913$$
$$\log. \text{tang}. KBL = 9,9454292$$
$$\overline{\log. LK = 7,1215205}$$
$$LK = 13228800.$$

Ferner ist in dem rechtwinklichten Dreyecke LKC:

$$KC : LK = r : \text{tang. } LCK$$

$$\begin{array}{r}\text{log. } r + \text{log. } LK = 17,1215205 \\ \text{log. } KC = 6,6989700 \\ \hline \text{log. tang. } LCK = 10,4225505 \\ LCK = 69^\circ\ 17'\ 42'' \\ ECB = 110^\circ\ 42'\ 18''\end{array}$$ und

$$\frac{ECB}{4} = 27^\circ\ 40'\ 34'',$$ dieser Winkel sollte

$$\frac{360^\circ}{13} = 27^\circ\ 41'\ 32''$$ seyn, folglich ist derselbe

um . . . . — — 58″ zu klein.

Wird nun der Bogen EB in vier gleiche Theile getheilt, und die Sehne, die zu einem Theile gehört, dreyzehnmal im Kreise herumgetragen, so bleibt von dem Umfange desselben ein Bogen von $13 \times 58'' = 12'\ 34''$ übrig. Soll die Länge dieses Bogens, wie vorhin, $\frac{1}{50}$ Zoll betragen, so ist der Durchmesser des dazu gehörigen Kreises 12, 96 Zoll.

Hier ist in dem Beweise folgende Lücke, Seite 88. heißt es: „so ist $EF = \frac{EG}{3}$.“ Diese Behauptung ist unrichtig.

§. 5.

Ein reguläres Siebenzehneck zu zeichnen.

„Wenn mit dem Halbmesser AC (Seite 89. Figur 29. hier Fig. 39.) der Bogen DF, und mit der Sehne des Bogens DB aus A und B Bogen geleget werden, die sich in Q schneiden, sodann von Q nach F gezogen wird, so wird durch QF der Bogen AM bestimmt, und $\frac{AM}{4} = \frac{\text{Peripherie}}{17}$.“

Prüfung. Man ziehe QC, QA, QB, DB und FC; auch setze man AC = 10000000. Nun ist der Bogen AD = 60°, folglich ist der Bo-

gen DB = 120°, also die Sehne DB = AQ = QB = 2 sin. 60° = 17320508. Da AQ = QB und AC = CB, so ist das Dreyeck ACQ rechtwinklicht und man hat:

$$AQ : r = AC : \cos. QAC, \text{ folglich}$$

$$\log. r + \log. AC = 17{,}0000000$$
$$\log. AQ = 7{,}2385491$$
$$\log. \cos. QAC = 9{,}7614509, \text{ giebt}$$
$$QAC = 54^\circ\ 44'\ 5'', \text{ also ist}$$
$$QC = \text{tang. } QAC = 14141670.$$

Da ACF = 60° ist, so ist QCF = 150° und QFC + FQC = 30°.

Nun hat man in dem Dreyecke QCF, folgende bekannte Proportion:

$QC + FC : QC - FC = \text{tang. } \frac{1}{2}\,(QFC + FQC) : \text{tang. } \frac{1}{2}\,(QFC - FQC).$

$$\log. \text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(QFC + FQC) = 9{,}4280525$$
$$\log. (QC - FC) = 6{,}6171756$$
$$16{,}0452281$$
$$\log. QC + FC) = 7{,}3827673$$
$$\log. \text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(QFC - FQC) = 8{,}6624608, \text{ giebt}$$
$$\tfrac{1}{2}\,(QFC - FQC) = 2^\circ\ 37'\ 55'', \text{ folglich}$$
$$FQC = 12^\circ\ 22'\ 5''.$$

Ferner hat man in dem Dreyecke QCM:

$$MC : \sin. FQC = QC : \sin. CMQ$$

$$\log. QC = 7{,}1505007$$
$$\log. \sin. FQC = 9{,}3308006$$
$$16{,}4813013$$
$$\log. MC = 7{,}0000000$$
$$\log. \sin. CMQ = 9{,}4813013$$
$$CMQ = 162^\circ\ 22'\ 5''$$
$$EMC = 17^\circ\ 37'\ 55''.$$

Da MCQ = EMC — EQC, so ist

MCQ = 5° 15′ 50″, nun ist

ACM = ACO — MCQ, also ist

ACM = 84° 44′ 10″ und

$\frac{ACM}{4}$ = 21° 11′ 2″, dieser Winkel sollte

$\frac{360°}{17}$ = 21° 10′ 35″ seyn, folglich ist derselbe um

27″ zu groß.

Wird dieser Fehler von 27″ siebenzehnmal genommen, so ist derselbe 7′ 39″. Hieraus folgt, daß jene Vorschrift, um ein reguläres Siebenzehneck zu zeichnen, bey einem Kreise von 18 Zoll im Durchmesser angewandt werden kann, wenn die vorhin angenommene Genauigkeit von $\frac{1}{50}$ Zoll verlangt wird.

Die Annahme, Seite 90: „so ist MA = My" ist nicht bewiesen.

§. 6.

Ein reguläres Neunzehneck zu zeichnen.

„Wenn man mit BE (Seite 91. Figur 30., hier Fig. 40.) der Sehne von $\frac{3}{2}$ Quadranten, aus B und A Bogen leget, die sich in L schneiden, sodann von L nach A ziehet, so wird die halbe Peripherie durch AL in M dergestalt geschnitten, daß $\frac{MB}{6} = \frac{\text{Kreis}}{19}$."

Prüfung. Man ziehe MC, auch setze man wie vorher AC = MC = 10000000. Nun ist BE = AL = der Sehne von $\frac{3}{2}$ Quadranten = der Sehne von 135° = 2 sin. 67° 30′ = 18477590.

Das rechtwinklichte Dreyeck ACL giebt:

AL : r = AC : sin. ALC, also ist

$$
\begin{array}{rl}
\log. r + \log. AC = & 17,0000000 \\
\log. AL = & 7,2666454 \\
\hline
\log. \sin. ALC = & 9,7333546, \text{ giebt}
\end{array}
$$

$$ALC = 32^\circ\ 45'\ 54'', \text{ mithin}$$
$$LAC = AMC = 57^\circ\ 14'\ 6'', \text{ folglich}$$
$$ACM = 65^\circ\ 31'\ 48'', \text{ also}$$
$$MCB = 114^\circ\ 28'\ 12'' \text{ und}$$
$$\frac{MCB}{6} = 19^\circ\ 4'\ 42''. \text{ Dieser Winkel sollte}$$
$$\frac{360^\circ}{19} = 18^\circ\ 56'\ 50'' \text{ seyn, folglich ist derselbe um}$$
$$7'\ 52'' \text{ zu groß.}$$

Werden diese 7′ 52″ neunzehnmal genommen, so entsteht bey jenem Verfahren, ein reguläres Neunzehneck zu zeichnen, ein Fehler von 2° 29′ 28″, folglich kann dasselbe, nur bey einem Kreise von 0,91 Zoll im Durchmesser angewandt werden.

Den Fehler im Beweise obiger Vorschrift findet man Seite 92. in dem Ausdrucke: „so ist $MA = Mo = \frac{7}{12} MB$“, was eben so wenig bewiesen als richtig ist.

§. 7.

Ein reguläres Dreyundzwanzigeck zu zeichnen.

„Wenn der Halbmesser AC (Seite 93. Figur 31., hier Fig. 41.) in K halbirt, in K die senkrechte Linie KL = Sehne des Quadranten errichtet, und von B nach L gezogen wird, so wird der Punct M bestimmt, und es ist $\frac{MB}{6} = \frac{\text{Kreis}}{23}$.“

Prüfung. Man ziehe MC, so ist, wenn man AC = 10000000 setzt, KL = der Sehne des Quadranten = 2 sin. 45° = 14142136, KC = 5000000 und KB = 15000000.

Nun hat man in dem rechtwinklichten Dreyecke LKB:

$$KB : KL = r : \text{tang. } KBL, \text{ also ist}$$

$$\log. r + \log. KL = 17{,}1505148$$
$$-\ \log. KB = 7{,}1760913$$
$$\log. tang. KBL = 9{,}9744235, \text{ alſo}$$
$$KBL = CMB = 43^\circ\ 18'\ 49'', \text{ folglich}$$
$$MCB = 93^\circ\ 22'\ 22'' \text{ und}$$
$$\frac{MCB}{6} = 15^\circ\ 33'\ 43''.$$ Dieſer Winkel ſollte
$$\frac{360^\circ}{23} = 15^\circ\ 39'\ 7''$$ ſeyn, folglich iſt derſelbe um . . . . 5′ 24″ zu klein.

Wird dieſer Unterſchied von 5′ 24″, dreyundzwanzigmal genommen, ſo beträgt derſelbe 2° 4′ 9″ und iſt ungefähr ſo groß wie bey dem vorhergehenden Neunzehneck, deswegen kann dieſe Vorſchrift nur bey einem Kreiſe von 1,09 Zoll im Durchmeſſer gebraucht werden.

In dem Beweiſe heißt es Seite 93: „ſo iſt MA = Mx = 11 Bx, welches unrichtig iſt.

§. 8.

Ein reguläres Neunundzwanzigeck zu zeichnen.

„Man lege mit AC (Seite 95. hier Fig. 42.) den Kreis AB, ſo iſt der Durchmeſſer AB, und der Mittelpunct C. Man halbire die Halbmeſſer AC und CB in K und Q; lege mit $AQ = BK = \frac{3}{4}$ Durchmeſſer aus K und Q Bogen, die ſich außerhalb dem Kreiſe in L ſchneiden; ziehe von L nach K, ſo wird der halbe Kreis in D geſchnitten, und der Punct D beſtimmt. Gemäß dieſer Figur iſt nun der Satz $\frac{DB}{8} = \frac{\text{Kreis}}{29}$.“

Prüfung. Man ziehe LC und DC, ſo iſt, wenn AC = 10000000 genommen wird, KC = 5000000, AB = 20000000 und $AQ = KB = KL = \frac{3}{4} AB = 15000000$.

Aus dem rechtwinklichten Dreyecke KCL ergiebt ſich:

$$KL : r = KC : \sin. KLC$$

$$\log. r + \log. CK = 16,6989700$$
$$\log. KL = 7,1760913$$
$$\log. \sin. KLC = 9,5228787$$
$$KLC = 19^\circ\ 28'\ 16''$$
$$LKC = 70^\circ\ 31'\ 44''.$$

Auch hat man:

$$r : KL = \sin. LKC : LC$$
$$\log. \sin. LKC = 9,9744240$$
$$\log. KL = 7,1760913$$
$$\log. LC = 7,1505153$$
$$LC = 14142100.$$

Ferner hat man in dem Dreyecke LDC:

$$DC : \sin. KLC = LC : \sin. LDC$$
$$\log. LC = 7,1505153$$
$$\log. \sin. KLC = 9,5228787$$
$$16,6733940$$
$$\log. DC = 7,0000000$$
$$\log. \sin. LDC = 9,6733940$$
$$LDC = 151^\circ\ 52'\ 28''$$
$$KDC = 28^\circ\ 7'\ 32''.$$

Da $DCL = KDC - KLC$ ist, so ist

$DCL = 8^\circ\ 39'\ 16''$, folglich

$DCB = 98^\circ\ 39'\ 16''$ und

$\frac{DCB}{8} = 12^\circ\ 19'\ 54''$. Dieser Winkel sollte

$\frac{360^\circ}{29} = 12^\circ\ 24'\ 49''$ seyn, folglich ist derselbe um

$4'\ 55''$ zu klein.

Wird demnach die Sehne des Bogens $\frac{DB}{8}$ neunundzwanzigmal im Kreise herumgetragen, so bleibt von dem Umfange desselben, ein Bogen von 29 × (4′ 55″) = 2° 22′ 35″ übrig. Es darf also der Durchmesser des Kreises, worin dies Vieleck beschrieben werden soll, nicht über 0,96 Zoll seyn, wenn die Länge jenes Bogens nur zu $\frac{1}{50}$ Zoll angenommen wird.

Seite 96. wird in dem Beweise dieses Neunundzwanzigecks gesagt: „so ist DA = Dw = 13 By,“ was eben so wenig bewiesen als richtig ist.

Zur leichtern Uebersicht und Vergleichung will ich die Resultate jener Prüfung in folgender Tafel zusammen stellen.

	I.	II.	III.
Fünfeck . . .	— 26′ 6″	— 2° 10′ 30″	1,05 Zoll
Siebeneck . . .	— 7′ 28″	— 52′ 16″	2,60 —
Eilfeck	+ 37″	+ 6′ 47″	20,32 —
Dreyzehneck . .	— 58″	— 12′ 34″	12,96 —
Siebenzehneck .	+ 27″	+ 7′ 39″	18,00 —
Neunzehneck . .	— 7′ 52″	— 2° 29′ 28″	0,91 —
Dreyundzwanzigeck	— 5′ 24″	— 2° 4′ 9″	1,09 —
Neunundzwanzigeck	— 4′ 55″	— 2° 22′ 35″	0,96 —

In dieser Tafel enthält die erste Columne die Fehler in Minuten und Secunden, welche nach Wlochatius Verfahren, bey jeder Seite dieser Vielecke Statt finden. In der zweyten Columne sind diese Fehler so viel mal genommen, als die ihnen zugehörigen Vielecke Seiten haben. Die Länge eines jeden Bogens, welchen jene Fehler betragen, ist zu $\frac{1}{50}$ Zoll angenommen, und hiernach sind die Durchmesser der ihnen zugehörigen Kreise, welche in der dritten Columne enthalten sind, berechnet.

Aus dieser Tafel ersieht man, daß sich nach Wlochatius Vorschriften, folgende Vielecke, als: ein Eilf-, Dreyzehn- und Siebenzehneck, sehr genau im Großen zeichnen lassen. Von jenen Vorschriften kann man daher vielfache und nützliche Anwendungen machen. Dagegen wird man von den Verzeichnungen der übrigen Vielecke, ohne daß man die Fehler, welche dabey Statt finden, verbessert, wohl schwerlich brauchbare Anwendungen machen können, weil man auf mechanische Weise dasselbe eben so genau und leicht erhalten kann.

Obgleich, wie wir gesehen haben, sich nach unsers Verfassers Vorschriften einige Vielecke durch Kreise und gerade Linien sehr genau zeichnen lassen: so kann man doch deswegen jene Verzeichnungen noch keine elementar-geometrische Constructionen nennen; denn bey diesen dürfen 1) gar keine Fehler Statt finden, auch muß sich alsdann 2) alles aus den vorausgesetzten Eigenschaften der Figuren lückenlos beweisen lassen, da dieses aber bey jenen Vorschriften der Fall nicht ist, wie ich vorher hinlänglich dargethan habe: so sind dieselben nur als mechanische, und nicht als geometrische Constructionen anzusehen.

Um durch diese Constructionen, sowohl kleine, als auch große Vielecke sehr richtig zeichnen zu können, muß man die Fehler, welche bey jedem Vielecke Statt finden, verbessern, welches auf folgende Art leicht geschehen kann.

Es sey (Fig. 35.) der Halbmesser AC = 10 Zoll, so ist der Durchmesser AB = 20 und der Umfang des Kreises AMOPQA = 62,8318 Zoll. Da wir vorher gefunden haben, daß nach Wlochatius Verfahren der Bogen AM um einen Bogen von 26′ 6″ zu klein wird, so berechne man die Länge desselben durch folgende Proportion:

360° : 26′ 6″ = 62,8318 Zoll: der Länge dieses Bogens = 0,0759 Zoll = dem Bogen Mn. Folglich ist der Bogen AM = $\frac{\text{Kreis}}{5}$, und die Sehne An die Seite des verlangten Fünfecks.

Es sey der Halbmesser eines jeden Kreises, worin folgende Vielecke beschrieben werden sollen = 10 Zoll, so findet man nach dem vorhergehenden Verfahren, daß nach Wlochatius Vorschrift in dem

Fünfeck . . .	(Fig. 35.)	der Bogen	AM um	0,0759 Zoll	zu klein ist.
Siebeneck . . .	(Fig. 36.)	—	— NB —	0,0434 —	zu klein ist.
Eilfeck	(Fig. 37.)	—	— DB —	0,0054 —	zu groß ist.
Dreyzehneck . .	(Fig. 38.)	—	— EB —	0,0112 —	zu klein ist.
Siebenzehneck .	(Fig. 39.)	—	— AM —	0,0052 —	zu groß ist.
Neunzehneck . .	(Fig. 40.)	—	— MB —	0,1372 —	zu groß ist.
Dreyundzwanzigeck	(Fig. 41.)	—	— MB —	0,0942 —	zu klein ist.
Neunundzwanzigeck	(Fig. 42.)	—	— DB —	0,1144 —	zu klein ist.

Diese berechnete Tafel läßt sich leicht auch auf kleinere oder größere Vielecke, wie oben angenommen sind, anwenden.

1. Exempel. Es soll in einem Kreise, dessen Halbmesser = 7 Zoll ist, ein reguläres Siebeneck gezeichnet werden.

Auflösung. Man berechne zuerst die Länge des Bogens Nn (Fig. 36.), um welchen der Bogen NB nach Wlochatius Verfahren zu klein wird, durch folgende Proportion:

10 Zoll : 7 Zoll = 0,0434 Zoll : dem Bogen Nn, also ist
Nn = 0,0303 Zoll.

Wird nun der Bogen nB in m halbiret: so ist die Sehne nm oder mB die Seite des verlangten Siebenecks.

2. Exempel. Es soll in einem Kreise, dessen Halbmesser $14\frac{1}{2}$ Zoll ist, ein reguläres Dreyundzwanzigeck gezeichnet werden.

Auflösung. Man berechne wie vorher die Länge des Bogens Mn (Fig. 41.), um welchen der Bogen NB, nach unsers Verf. Vorschrift, zu klein ist, durch folgende Proportion:

$10 : 14\frac{1}{2} = 0,0942 :$ Mn, also ist
Mn = 0,1365 Zoll.

Wird nun der Bogen BM um Mn = 0,1365 Zoll verlängert, und alsdann der Bogen nB in 6 gleiche Theile na, ab, bc u. s. w. getheilt: so ist die Sehne von $\frac{nB}{6}$ oder die Sehne von na oder ab u. s. w. die Seite des verlangten regulären Dreyundzwanzigecks.

Da Wlochatius Vorschriften, reguläre Vielecke zu zeichnen, sehr einfach sind, so kann man, wenn dieselben nach dem eben gewiesenen Verfahren verbessert werden, vielfach, und besonders sehr nützlich in der Uhrmacherkunst anwenden, um Theilscheiben darnach einzutheilen.

Druckfehler.

Seite 26 Zeile 13 von unten muß stehen: Reduction.

— 28 — 5 — — — — — — $\frac{b}{(y-1)^2} \cdot \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + by - y^2)}$.

— 28 — 2 — — — — — — $\frac{by}{(y-b)^2} \cdot \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + by - y^2)}$.

— 29 — 9 von oben — — $\frac{y}{(y-1)^2} \cdot \sqrt{(4 + y - y^2)}$.

— 31 — 7 — — — — IQ.

— 41 — 4 von unten — — daß $Ac = ab$ ist.

— 46 — 4 von oben — — daß man sie auf.

— 55 — 14 von unten — — $AP = x$.

— 72 — 10 — — — — FG.

— 74 — 1 — — — — BQ.

— 82 — 10 — — — — DM.

— 85 — 10 von oben — — $PAM = \varphi$.

— 88 — 10 — — — — $AP^2 + PC^2$.

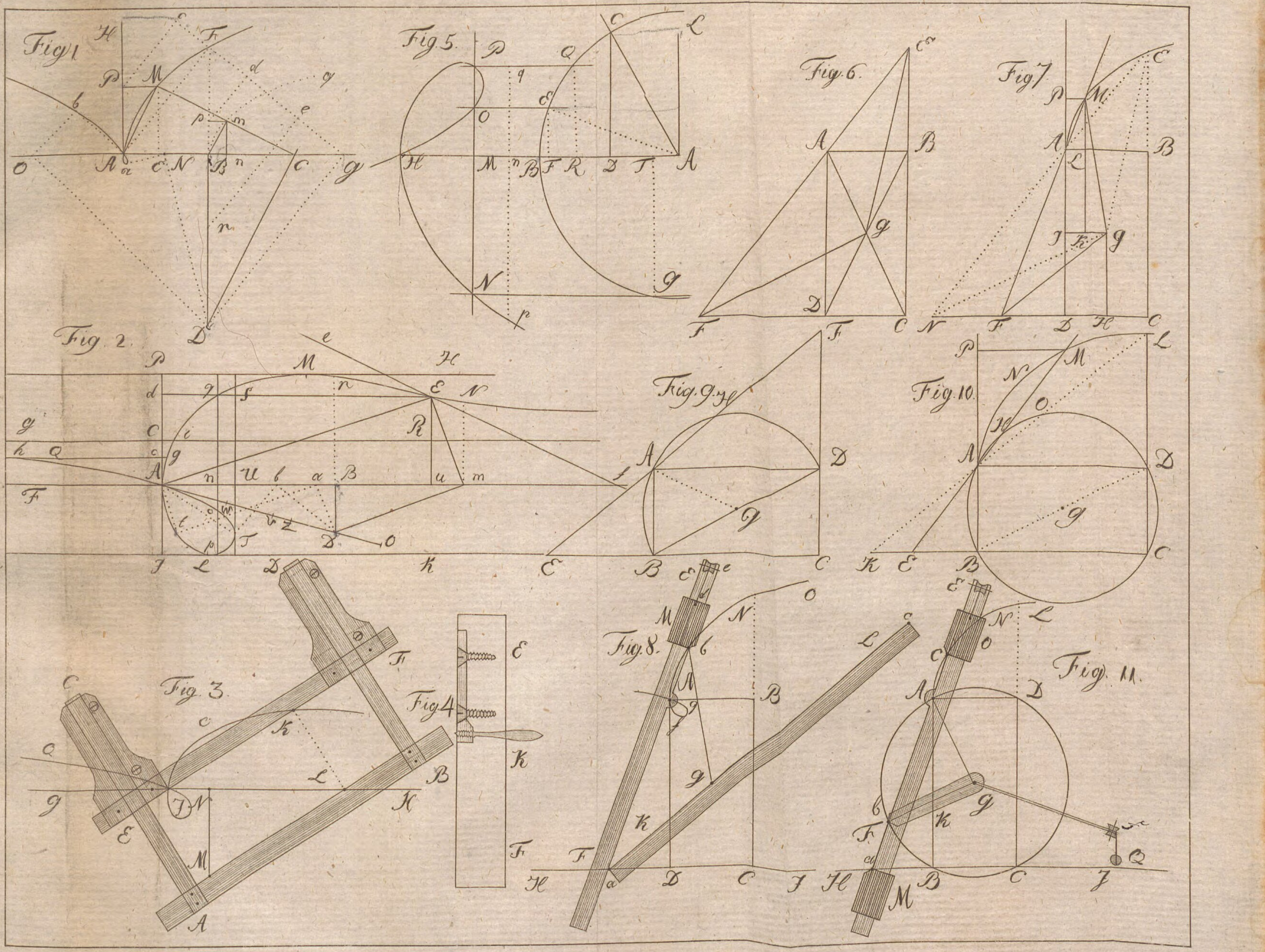
— 94 — 4 — — — — vom siebenten Grade.

— 6 u. 8 — — — — pn.

— 118 — 1 von unten — — AO und O.

In Figur 37 fehlt der Bogen CK.

Tab. I.



Tab. II.

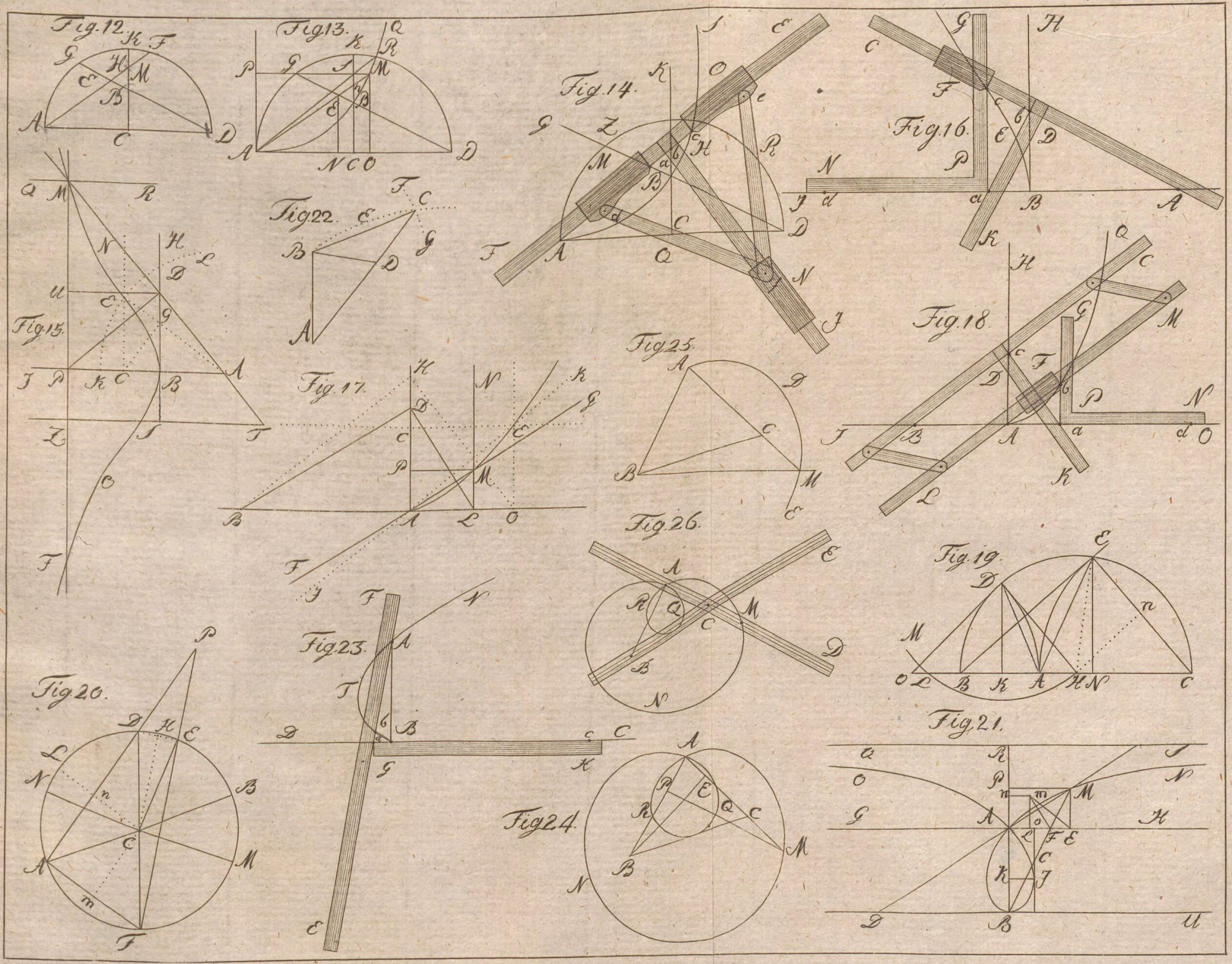


Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.

Tab. III

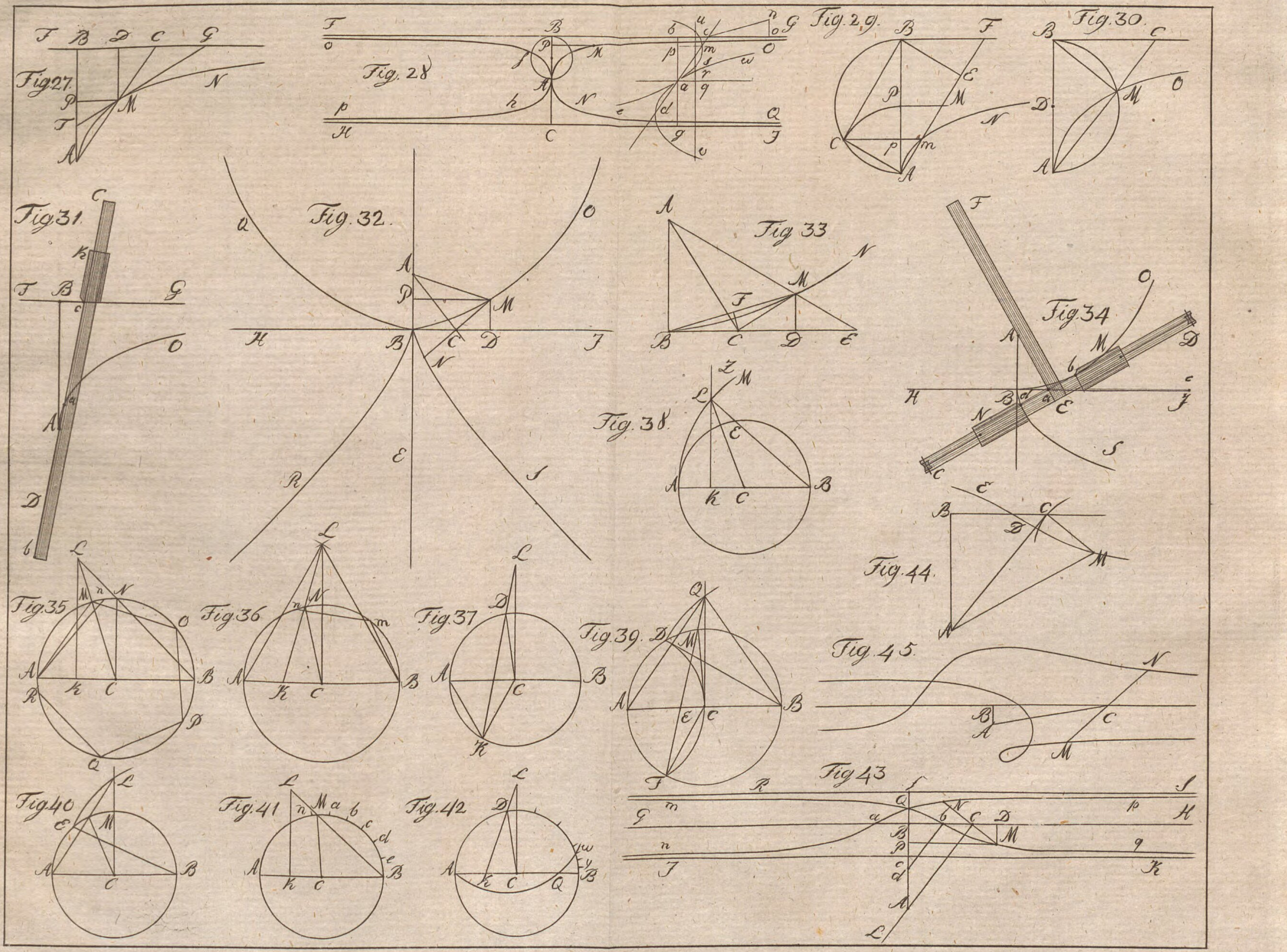


Fig. 27
Fig. 28
Fig. 29
Fig. 30
Fig. 31
Fig. 32
Fig. 33
Fig. 34
Fig. 35
Fig. 36
Fig. 37
Fig. 38
Fig. 39
Fig. 40
Fig. 41
Fig. 42
Fig. 43
Fig. 44
Fig. 45

Tab. IV.

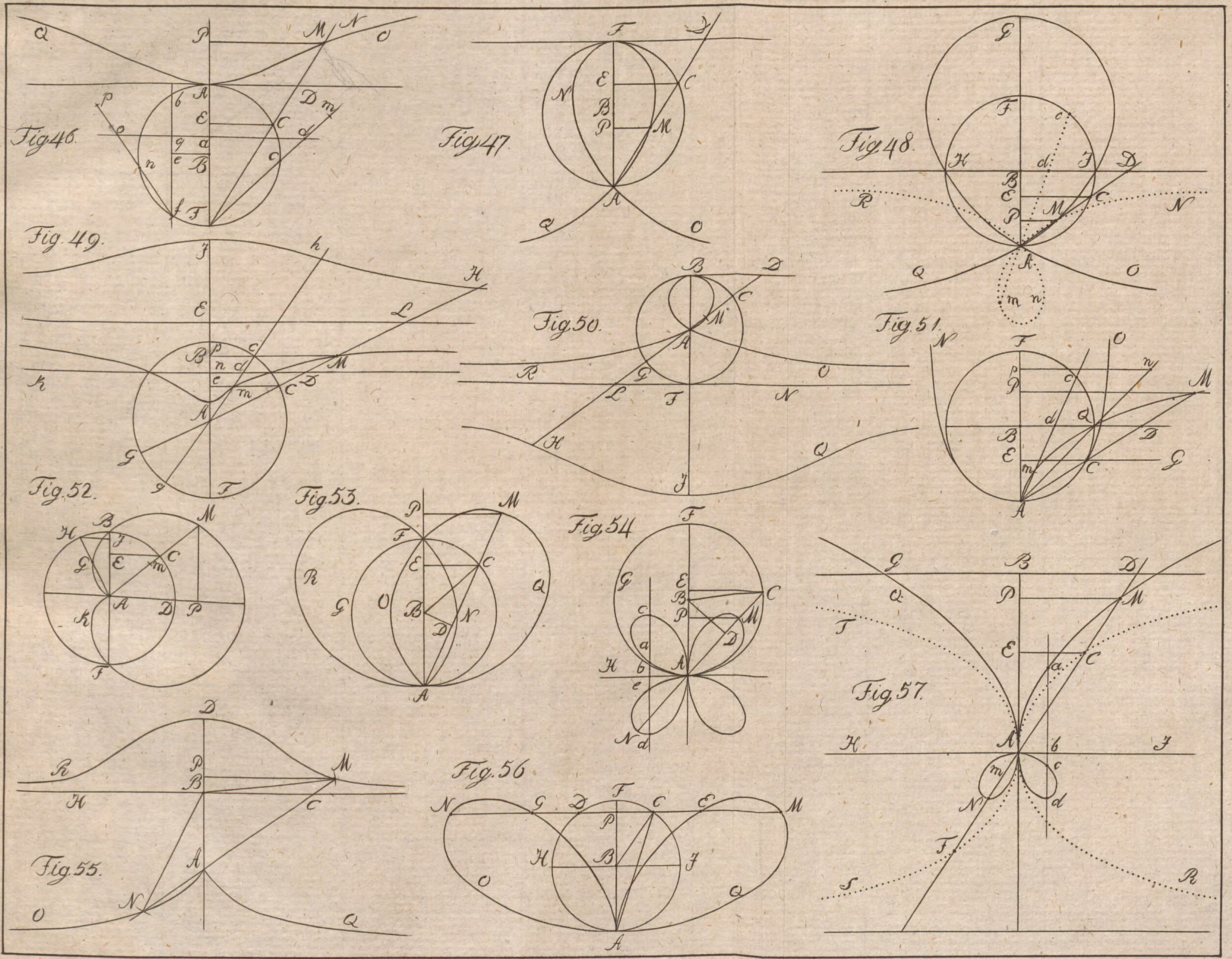


Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Uhlhorn, Diedrich,

Entdeckungen in der höhern Geometrie theoretisch und practisch abgehandelt ; nebst Prüfung der von A. W. Wlochatius aufgestellten elementar-geometrischen Auflösung des Delischen Problems u.s.w

Oldenburg 1809

4 Math.p. 372
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053234-6